

# 几何观止

经典几何对象

---

熊锐

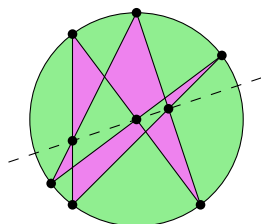
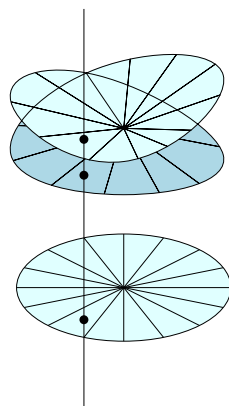
编译时间: 2019 年 11 月 24 日



$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\omega \in \Lambda \setminus \{0\}} \left( \frac{1}{(z + \omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right)$$

将本书献给

朱奕



— 我很喜欢我们讨论的那些数学问题

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i + \int K d\sigma = 2\pi$$





# Preface

首先,我认为自己的几何水平并不高,严格意义上说我只是一个“几何爱好者”,本书只是一些我喜欢的,并且乐于谈论的几何常识.由于个人的学识有限,也受制于学习经历,当中有错误或有偏颇也在所难免,还请诸位方家斧正.

何谓“几何”,这是一个曾经被热烈讨论的议题.我认为,简单来说,就是关于“形”的数学.不论是公理化的几何,代数拓扑,微分几何,代数几何,能够“被看见”往往是第一步.因此代数拓扑,微分几何,代数几何都被我归入广义的“几何”门类下.

但是现在很多“几何”书,图的数量实在少的可怜.我认为一个原因是抽象.诚然,现代数学是高度抽象的,但是往往抽象是建立在具体的,甚至可以说是“可见的”的例子或者现象之上.因此我挑选了很经典的那些几何对象,从不同角度提供一些现象,解释或者计算.这些例子其实都是几何学家所能熟练把玩的几何对象.我认为另一原因在于几何的“感觉”.很多时候我们需要把“感觉”传达到位往往词不达意,因此我尽量多地插图和用“生动形象”的语言描述和解释.

在谈论过程中用到了很多拓扑和几何的概念和定理,我认为这不可避免的,而且使用起来也无可厚非.不理解则跳过理解能够理解的,或者部分理解再以此为动机去学习相关理论都是健康的阅读方式.另外,几何无可避免地记号多且不自明,我会尽量采用最自明的记号和解释说明来描述.几何学的各个角度看待同一事物会有不同的理解方式,几何与其他数学分支相互交融,也会产生不同的观点.这是我认为几何的妙处之一,也是我最想在书中体现的.

同时我还好为人师地安排了一些习题.这些内容往往能再提供一些例子或者理解方式,或者隐射到更深层面的内容.

每章最后附了一些参考文献, 这并非意味着我认同其写作模式, 或者可以在上面看到我提到的某种理解方式, 只是在这些书上可以找到我提到的结论. 实际上, 采用这种不严格的参考文件格式实在是因为, 有不少解释和感觉是我自己想通的, 找不到落实到文字上的文献. 如果你喜欢我的理解方式我感到非常荣幸, 但是专业学习宜咨询专家, 而我只是一个爱好者.

感谢免费好用的作图软件 `ipe`, 本书中所有插图都是由其制作. 感谢俄罗斯圣彼得堡国立大学对我的赏识, 让我能够静下心来编纂这本书.

最后尤其感谢朱奕这段时间和我讨论很多数学问题, 很多问题是几何的. 而且他也教会我一些几何. 为了表示感谢, 他在本书中拥有一整页有着他喜欢动漫角色的专属页面.

熊锐

2019 年 6 月 17 日凌晨



Grothendieck

# Contents

<b>Preface</b>	<b>i</b>
<b>Contents</b>	<b>iii</b>
<b>1 二维平面 <math>\mathbb{R}^2</math></b>	<b>1</b>
<b>2 一维圆周 <math>S^1</math></b>	<b>15</b>
<b>3 二维球面 <math>S^2</math></b>	<b>28</b>
<b>4 二维轮胎面 <math>T^2</math></b>	<b>44</b>
<b>5 射影平面 <math>\mathbb{P}^2</math></b>	<b>60</b>
<b>6 上半平面 <math>\mathbb{H}^2</math></b>	<b>76</b>
<b>7 三维正交群 <math>SO_3</math></b>	<b>92</b>
<b>List of Figures</b>	<b>108</b>
<b>Index</b>	<b>112</b>





# Chapter 1

## 二维平面 $\mathbb{R}^2$

二维空间  $\mathbb{R}^2$  毫无疑问是最基本的几何对象.

**作为拓扑空间** 首先作为拓扑空间,  $\mathbb{R}^2$  是局部紧致, 且道路连通的.

关于道路连通, 还可以多说一些.

**定理 1.1** 在二维平面  $\mathbb{R}^2$  上, 去掉有限个点仍然是道路连通的.

**证明** 假设去掉的点是  $a, b, \dots, c$ , 任意取两个待连接的点  $x, y \in \mathbb{R}^2 \setminus \{a, \dots, c\}$ . 实际上可以说明存在一个点  $z$  使得  $l_{zx}$  与  $l_{zy}$  不穿过  $a, \dots, c$  任何一个, 其中  $l_{zx}$  和  $l_{zy}$  分别表示经过  $z, x$  和  $z, y$  的直线. 因为所有“可疑”的直线不可能覆盖整个平面. 如图 (1.1). □

用这个方法还可以说明删去可数个点都不会破坏道路连通性, 不过我们暂不需要. 但是一维直线  $\mathbb{R}^1$  显然不具备这种性质, 故我们得到了如下的推论.

**推论 1.2** 二维平面  $\mathbb{R}^2$  和一维直线  $\mathbb{R}^1$  不同胚.

以上结果自然是维数论的最朴素的侧面. 我们不禁会问,  $\mathbb{R}^n$  和  $\mathbb{R}^m$  同胚是否当且仅当  $m = n$ ? 更一般地,  $\mathbb{R}^n$  的开集能否和  $\mathbb{R}^m$  的开集同胚?

直觉上, 如果  $n < m$ ,  $\mathbb{R}^n$  到  $\mathbb{R}^m$  不存在同胚的原因在于前者“数目很小”. 回想集合论上如何论证两个几何论的大小, 无非是说“不存在大到小的单射”或者“不存在小到大的满射”. 但是这些角度最终落空.

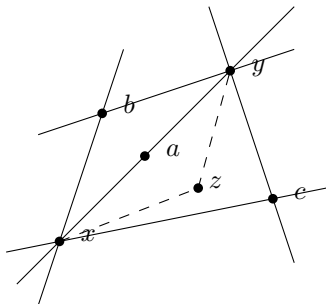


Figure 1.1: 平面去掉有限个点不影响道路连通性

- 首先, 当然, 利用集合论上的基数并不能说明大小, 因为  $|\mathbb{R}^n| = |\mathbb{R}^m|$ .
- Peano 曲线构造出  $[0, 1]$  到  $[0, 1]^2$  的满射, 稍加改造就可以得到  $\mathbb{R}$  到  $\mathbb{R}^2$  的满射 (习题1.9). 从而得到任意维数的满射  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ .
- 证明不存在  $\mathbb{R}^m$  到  $\mathbb{R}^n$  的单射的难度与原问题相当.

这一问题的解决的最简单方案就是使用一些代数拓扑. 因为  $\mathbb{R}^n$  任意删去一个点同伦等价于  $n-1$  维球面  $S^{n-1}$ , 而球面同调群的不同直接区分出  $n$ . 这正是所谓的“**维数不变性**”. 这表明偏向“分析”的角度切入维数往往落空, 而“几何”的角度则更加精细地分辨出维数.

熟知局部紧致空间都可以施加单点紧致化.

**定理 1.3** 二维平面  $\mathbb{R}^2$  的单点紧致化  $\mathbb{R}^2 \sqcup \{\infty\}$  同胚于球面  $S^2$ .

**证明** 这件事可以利用“**球极投影**”来看, 如图 (1.2). 可作  $P: S^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \sqcup \{\infty\}$ , 使得  $x, P(x), (0, 0, 1)$  处于一条线, 当  $x = (0, 0, 1)$  时, 规定  $P(x) = \infty$ . 不难验证这是同胚. □

一般地,  $\mathbb{R}^n$  的单点紧致化同胚于  $S^n$ , 也可以通过上面的球极投影构造. 球极投影的一个重要性质是保角. 我们将在 (3.3) 看到.

**作为微分流形** 欧式空间无疑是最简单的流形. 我们选取恒等映射  $\mathbb{R}^2 \xrightarrow{(x,y)} \mathbb{R}^2$  为坐标映射. 换言之, 其中  $x, y$  分别是投影映射.

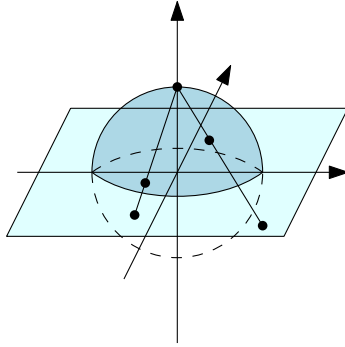


Figure 1.2: 球极投影

首先,  $\mathbb{R}^2$  是可定向的, 这是因为有恒不为 0 的微分形式  $dx \wedge dy$ . 实际上, 全局切向量场  $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \in \text{Vec}(\mathbb{R}^2)$ , 在每点都张成了整个切空间. 当然, 利用  $\mathbb{R}^2$  是 Lie 群也能自动得出这一结论. 外蕴地看, 如果通过  $(x, y) \mapsto (x, y, 0)$  将  $\mathbb{R}^2$  嵌入  $\mathbb{R}^3$ , 法向量也显然易见.

任意  $p \in \mathbb{R}^2$ , 我们将  $p$  点的切空间和  $\mathbb{R}^2$  作如下等同,

$$\text{等同: } \text{Tan}_p(\mathbb{R}^2) \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^2 \quad a \frac{\partial}{\partial x} \Big|_p + b \frac{\partial}{\partial y} \Big|_p \mapsto (a, b)$$

取  $p$  点的两个切向量  $v, w$ , 可以定义他们的内积  $g_p(v, w) = \langle v, w \rangle$ , 其中  $\langle -, - \rangle$  是  $\mathbb{R}^2$  的标准内积. 这样  $g = [p \mapsto g_p] \in (\text{Diff} \otimes \text{Diff})(M)$  定义了一个 Riemann 流形.

熟知平面  $\mathbb{R}^2$  的 Gauss 曲率是 0, 最简单的方法就是通过  $(x, y) \mapsto (x, y, 0)$  将  $\mathbb{R}^2$  嵌入  $\mathbb{R}^3$ , 可发现 Gauss 映射就是常函数. 这对应的直观是  $\mathbb{R}^2$  是“平”的, 没有任何弯曲. 不过问题在于我们需要仔细考虑怎样才能叫做“弯曲”? 或者何以衡量弯曲程度, 即所谓曲率? 这是微分几何所密切关心的.

我们有向量场和微分形式的如下对偶

$$\begin{array}{ccccc} \text{Diff}^0(\mathbb{R}^2) & \xrightarrow{d} & \text{Diff}^1(\mathbb{R}^2) & \xrightarrow{d} & \text{Diff}^2(\mathbb{R}^2) & (*) \\ \parallel & & dx \mapsto \frac{\partial}{\partial x} \downarrow & dy \mapsto \frac{\partial}{\partial y} & \downarrow dx \wedge dy \mapsto 1 \\ \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2) & \xrightarrow{\text{梯度}} & \text{Vec}(\mathbb{R}^2) & \xrightarrow{\text{旋度}} & \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2) \end{array}$$

这将微分形式和矢量分析结合起来.

一件重要的事是  $\mathbb{R}^2$  上无旋场总是一个梯度. 这当中蕴含无旋场“积分与路径无关”的这一事实.

**定理 1.4 (Poincaré)** 任何  $\mathbb{R}^2$  上的切向量场  $X = (f, g) \in \text{Vec}(\mathbb{R}^2)$ , 下列条件是等价的,

- $X$  无旋, 即  $\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial x} = 0$ .
- 存在光滑函数  $h \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2)$  使得  $h$  的梯度恰是  $X$ , 即  $\frac{\partial h}{\partial x} = f, \frac{\partial h}{\partial y} = g$ .

且如果存在, 在相差常数意义下唯一的.

**证明** 这本质上是一个线性偏微分方程的问题. 后推前是容易的, 前推后的标准的方法就是利用路径积分定义欲求的  $h$ . 根据 Green 公式, 无旋意味着积分与积分路径无关, 从而良定义. 关于唯一性, 这是数学分析的结论 — 两个偏导数恒为 0, 则函数本身为常函数.  $\square$

但是  $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  就未必有这条性质. 考虑角度函数

$$\theta: \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R} \quad (x, y) \mapsto \arctan \frac{y}{x}.$$

这个函数并不光滑, 但是在  $\text{mod } 2\pi$  意义下光滑, 因此其微分

$$d\theta = \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$$

是良定义的. 这对应到场  $\Theta = \frac{1}{x^2 + y^2}(-y, x)$ , 参见图 1.3.

此时, 虽然  $\Theta$  的旋度

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{-y}{x^2 + y^2} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{x}{x^2 + y^2} \right) = 0,$$

但是  $X$  不能是一个梯度, 因为, 如果是  $f$  的梯度话, 用 (1.4) 一样的方法,  $f$  在局部上必定和  $\theta$  只差常数, 但是整体上“接不起来”. 不过, 我们有如下结果, 表明这样的向量场本质上只有  $\Theta$  一种.

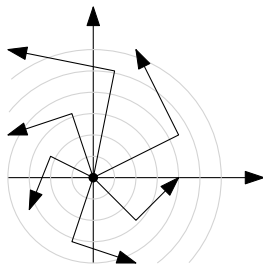


Figure 1.3: 场  $\Theta = \frac{1}{x^2+y^2}(-y, x)$ , 连同线素/积分曲线

**定理 1.5** 任何  $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  上的切向量场  $X = (f, g) \in \text{Vec}(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$ , 如果  $X$  无旋, 即  $\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial x} = 0$ , 那么存在唯一的  $\lambda \in \mathbb{R}$ , 以及光滑函数  $h \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$  使得  $h$  的梯度恰是  $X - \lambda\Theta$ . 其中  $\Theta = \frac{1}{x^2+y^2}(-y, x)$ .

**证明** 如果这样的  $h$  存在, 根据微积分基本定理, 在单位圆周上转动一圈积分应该是 0. 于是这说明

$$\int_{|S^1} (f dx + g dy) - \lambda \underbrace{\int_{|S^1} \Theta}_{=2\pi} = 0.$$

这诱使我们定义  $\lambda = \frac{1}{2\pi} \int_{|S^1} f dx + g dy$ . 这样, 用  $X - \lambda\Theta$  替代  $X$  可以假设  $\int_{|S^1} f dx + g dy = 0$ .

下面我们照搬 (1.4) 的过程, 如图1.4. 我们将第一象限删去, 在剩余部分内部利用 (1.4) 同样的方法得到  $h_1$  使得在剩下的部分  $h_1$  的梯度是  $X$ . 去掉第三象限类似得到  $h_2$ . 此时在共同的剩余部分, 即二四象限上,  $d(h_1 - h_2) = 0$ , 因此  $h_1 - h_2$  是一个常数, 假设

$$(h_1 - h_2)(x) = \begin{cases} a & x \text{ 在第二象限} \\ b & x \text{ 在第四象限} \end{cases}.$$

在单位圆周上任意选两个点  $z, w$ , 使得  $z$  处于第二象限,  $w$  处于第四象限. 现在将单位圆周上拆成  $z \rightarrow w$  的部分  $\ell_1$  和  $w \rightarrow z$  的部分  $\ell_2$ , 带入条件得到

$$0 = \int_{\ell_1 + \ell_2} f dx + g dy = \int_{\ell_1} d(h_1) + \int_{\ell_2} d(h_2) = h_1(w) - h_1(z) + h_2(z) - h_2(w) = b - a$$

于是  $h = \begin{cases} h_1 & x \text{ 不在第一象限} \\ h_2 + a & x \text{ 不在第三象限} \end{cases}$  给出了满足条件的  $h$ . □

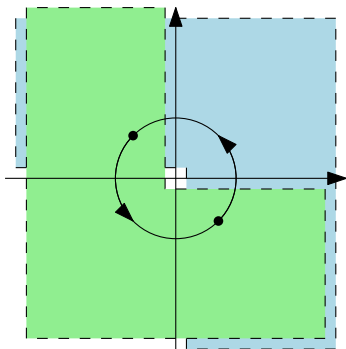


Figure 1.4:  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

如果仔细冥想为什么会出现这种现象, 问题的关键在于  $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  比  $\mathbb{R}^2$  上了一个点, 或者说多了一个“洞”. 上述过程说明“洞”虽然不是一个点, 更不是一个子集, 但是真实存在于这个空间, 并且可被上面的微分形式或者向量场“探测”. 换言之, 生活在  $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  上的生物看不见摸不着, 但是如果他们足够聪明, 他们一定能知道他们的世界里有一个“洞”.

对于定义在  $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  上的场  $X = (f, g)$ , 确定  $\lambda = \frac{1}{2\pi} \int_{S^1} f dx + g dy$  的过程实际上给出线性同构

$$\frac{\ker \text{旋度}}{\text{im 散度}} \rightarrow \mathbb{R}$$

同样, 如果借助 (\*) 的语言就会表达得更统一

$$\frac{\ker d^1}{\text{im } d^0} \cong \mathbb{R} \quad \begin{cases} \text{Diff}^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) \xrightarrow{d^1} \text{Diff}^2(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) \\ \text{Diff}^0(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) \xrightarrow{d^0} \text{Diff}^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) \end{cases}$$

使用上同调的语言, 这说明了 de Rham 上同调

$$H_{\text{deRham}}^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) = \mathbb{R}$$

当然上面定义的  $\Theta$  的妙用不止于此, 对于一条不经过原点的回路  $p$ , 我们

可以在上面积分, 求出旋转的角度数, 从而定义“**旋转指数**”即“**圈数**”为

$$\text{ind}_0 p = \frac{1}{2\pi} \int_p d\theta. \quad (*)$$

这必定是一个整数. 只需通过平移我们也可以对任意  $p$  不经过的点  $x$  定义  $\text{ind}_x p$ . 当然, 这也是复分析需要考虑的. 图1.5给出了一些旋转指数的例子.

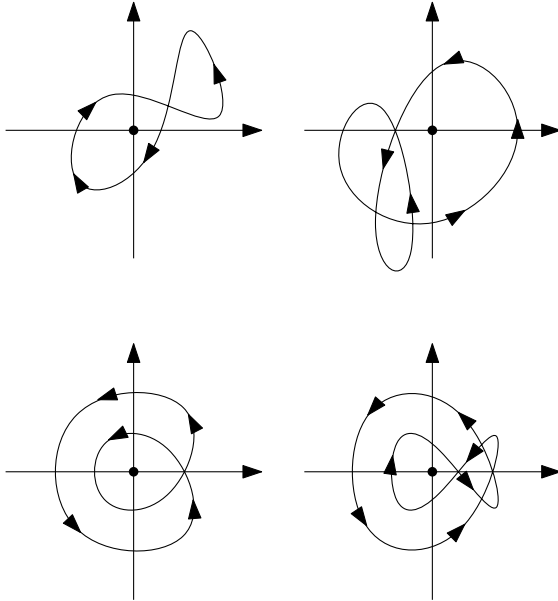


Figure 1.5: 旋转指数是  $-1, 1, 2, 0$

**作为复流形** 如果视复平面  $\mathbb{C} = \mathbb{R} \oplus i\mathbb{R} = \mathbb{R}^2$ , 那么  $\mathbb{R}^2$  还构成一个域. 下面假定  $\Omega \subseteq \mathbb{C}$  是一个连通开集. 上面的全纯函数性质颇丰, 当中能牵涉的几何概念也很广.

首先, 可导的条件  $df = f'dz$ , 可被粗犷地理解为, 在  $\Delta z$  很小时

$$\Delta f \approx f' \Delta z.$$

其中  $\Delta$  表示变化. 注意到, 如果固定  $z_0$  和  $\Delta z$ ,  $z$  的变化范围是一个圆, 这说

明全纯函数将一个“很小”的圆变成一个“很小”的圆，且这个变化不过是一个复数相乘，如图1.6.

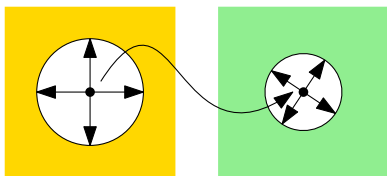


Figure 1.6: 复可导

这就足够看清复分析的很多结果，在  $f' \neq 0$  的点处，有

- 全纯函数保角 — 直观地看，就是局部不会改变夹角。
- 全纯函数保向 — 数乘不过是拉伸或者旋转自然不会旋转  $\mathbb{C}$  的方向。

当然，论证来自于 **Cauchy-Riemann 方程**，假如记全纯函数  $f(z) = u(z) + iv(v)$ ，其中  $u, v$  是实函数，那么

$$\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad \left| \frac{\partial f}{\partial z} \right|^2 = \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2.$$

这说明诱导的度量

$$\begin{aligned} du^2 + dv^2 &= \left( \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy \right)^2 \\ &= \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] (dx^2 + dy^2) \\ &= |f'(z)|^2 (dx^2 + dy^2). \end{aligned}$$

这说明一点的内积只改变了数乘，从而不改变角度。关于定向，上述说明 Jacobi 行列式

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} = \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 = |f'(z)|^2.$$

从而保持定向。



下面, 我们紧接上面旋转指数的讨论. 利用留数定理, 注意到  $1/z$  在 0 处的留数是 1, 留数定理给出直观“旋转指数”或“圈数”.

**定理 1.6** 对于一条不经过 0 的回路  $p$ , 上文 (\*) 部分定义的旋转指数

$$\text{ind}_0 p = \frac{1}{2\pi i} \int_p \frac{dz}{z},$$

且这是一个整数.

**证明** 直接计算表明右边的实部就是我们 (\*) 中定义的  $\frac{1}{2\pi} \int_p \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2} = \frac{1}{2\pi} \int_p d\theta$ , 故只要证明关于整数的论断. 假设回路  $p: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ , 那么  $\frac{1}{2\pi i} \int_p \frac{dz}{z} = \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 \frac{p'(t)}{p(t)} dt$ . 考虑  $\varphi(t) = \exp\left(\int_0^t \frac{p'(t)}{p(t)} dt\right)$ , 证明是整数只需要证明  $\varphi(1) = 1$ . 施加以形式对数导数得到

$$\frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)} = \frac{p'(t)}{p(t)}.$$

对数导数的直觉使我们猜测  $\varphi/p$  是一个常数, 这可不难通过求导验证, 这说明  $\varphi(0)/p(0) = \varphi(1)/p(1)$ , 于是  $\varphi(1) = 1$ , 命题得证.  $\square$

这表明  $\frac{1}{2\pi i} \cdot \frac{dz}{z}$  大致在复分析中起到  $\frac{d\theta}{2\pi}$  的作用. 假如我们用更加不合理的记号, 记  $d\left(\frac{\log z}{2\pi i}\right) = \frac{1}{2\pi i} \cdot \frac{dz}{z}$ . 我们会发现, 局部上,  $\frac{\log z}{2\pi i}$  的实部就是  $\frac{\theta}{2\pi}$ . 如果将  $\exp$  看做  $\mathbb{C}$  到  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  的覆叠, 那么形式写出的“对数函数”就是一个“提升”, 用“提升”定义旋转指数也是代数拓扑的标准做法.

复分析告诉我们, 任何一个  $\Omega$  上的亚纯函数  $f$ , 任意一个点  $p \in \Omega$ , 我们都可以定义在这点的**消没次数**  $\nu_p(f)$ , 为这一点展成 Laurant 级数的最低次非零单项式的次数, 即

$$\nu_p(f) = n \iff f(z) = \underbrace{a_n}_{\neq 0} (z-p)^n + \underbrace{(\dots)}_{\text{deg} > n} \quad z \text{ 在 } p \text{ 附近}$$

这种定义允许我们谈论“ $n$  重零点”, 当然, 这里  $n$  可以是负的.

著名的**幅角原理**给出

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Omega} \frac{f'}{f} dz = \sum_{p \in \Omega} \nu_p(f)$$

其中  $\Omega$  是某个带边区域. 假如左边用更漂亮的记号写作  $\frac{1}{2\pi i} \int_{f(\partial\Omega)} \frac{dw}{w}$ , 这正是  $f(\partial\Omega)$  环绕 0 的圈数. 有了消没次数, 右边我们可以称之为  $\Omega$  内  $f$  的按重

数计算的零点总数目. 这样幅角原理将“环绕的圈数”和“零点的个数”联系在一起. 更一般的, 一个点的原像个数究竟如何和“圈数”这一类和“洞”有关的量联系起来, 这正是映射度理论所关心的. 直观来看如图1.7和图1.8, 边界拖拽这内部环绕了  $n$  次, 也就意味着“叠了  $n$  重”.

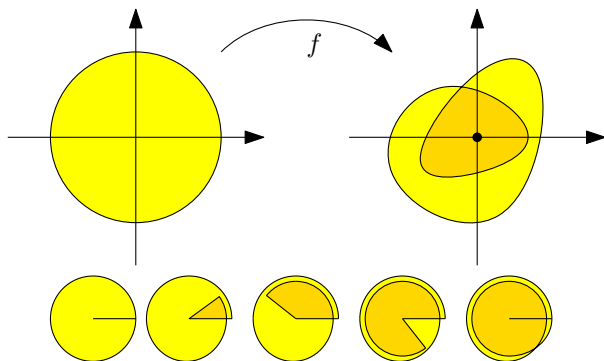


Figure 1.7: 幅角原理

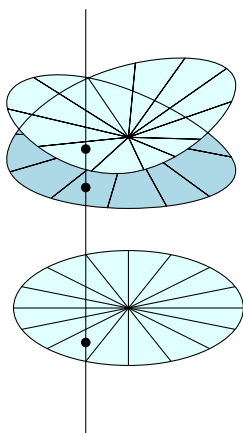


Figure 1.8: 幅角原理

下面的定理告诉我们, 实际上叠的“重数”决定了局部态性. 换言之, 全纯函数局部上看形态是非常有限的.

**定理 1.7** 对于  $\Omega$  全纯函数  $f$ , 假如  $f(z_0) = w_0$ , 那么存在如下交换图

$$\begin{array}{ccc}
 U & \xrightarrow{u} & \mathbb{D}^2 \\
 f|_U \downarrow & & \downarrow z \mapsto z^n \\
 V & \xrightarrow{v} & \mathbb{D}^2
 \end{array}
 \quad \left\{ \begin{array}{l}
 U, V \text{ 分别是 } z_0, w_0 \text{ 的邻域;} \\
 u, v \text{ 是全纯同构;} \\
 \mathbb{D}^2 \text{ 是单位闭圆盘.} \\
 n \geq 0 \text{ 是整数.}
 \end{array} \right.$$

**证明** 不妨假设  $z_0 = w_0 = 0$ . 再调整数乘, 假设  $f$  在  $z_0 = 0$  附近写成  $f(z) = z^n + (\text{deg} > n)$ , 假设  $f(z)/z^n = g(z)$ , 我要为  $g(z)$  开  $n$  次方根. 通用的方法是视  $g^{1/n} = \exp(\frac{1}{n} \log g)$  转化到找  $\log g$  上. 注意到  $g(0) \neq 0$ , 我们可以选取足够小的含有  $g(0)$  凸邻域, 让对数存在, 这就完成了证明. 最后利用开映射定理一起缩小邻域.  $\square$

这正是所谓**分歧覆叠**的概念. 上面出现的  $n$  被称为分歧指数. 我们会看到,  $z \mapsto z^n$  这一映射, 除了  $0$  这一点仅有一个原像, 其他部分均有  $n$  个原像, 换言之,  $\left[ \begin{array}{ccc} f: \mathbb{D}^2 \setminus \{0\} & \longrightarrow & \mathbb{D}^2 \setminus \{0\} \\ z & \longmapsto & z^n \end{array} \right]$  是覆叠映射.

**习题 1.8** 证明  $\mathbb{C}$  上的  $n$  阶可逆矩阵  $\text{GL}_n(\mathbb{C})$  是道路联通的. (提示: 任意选择两个可逆矩阵  $A, B$ , 选择经过两者的“复直线”, 换言之, 平面, 证明不可逆的点是有限个.)

**习题 1.9** 构造  $\mathbb{R}$  到  $\mathbb{R}^2$  的满射. (提示: 考虑 Peano 曲线的“伸缩”和“平移”得到  $[2n, 2n+1] \rightarrow [-|n+1|, |n+1|]^2$ , 而  $[2n-1, 2n]$  中间以直线连接.)

**问题 1.10** 如果想要像复分析中那样引入  $dz, d\bar{z}, \frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}}$  等记号, 严格来说, 要遵循如下步骤.

- 先将每一点  $p$  的余切空间  $\text{Diff}_p$  复化为  $\text{Diff}_p \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ , 再定义

$$dz = dx + idy \quad d\bar{z} = dx - idy$$

其中  $\mathbb{C} \xrightarrow{(x,y)} \mathbb{R}^2$  是恒等映射的坐标.

- 因为复化和对偶空间可以交换, 可以定义  $dz, d\bar{z}$  的对偶基是  $\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ . 如果转写成  $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}$  的形式就是

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right).$$

我们称光滑函数  $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2)$  是全纯的, 如果  $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$ . 试证明这样定义的全纯和复分析书上定义的全纯是等价的.

**问题 1.11** 尝试证明三维版本的 *Poincaré* 引理 (1.4). (提示: 这时, 或许需要曲面积分.)

**问题 1.12** 回忆并解释 *Rouché* 定理的几何意义. (提示: *Rouché* 定理断言, 如果在边界上有  $|f - g| < |f|$ , 那么  $f, g$  具有相同的零点数目, 因为  $f$  到  $g$  的“距离”不到  $f$  到原点的距离, 这样的边界变化不影响圈数.)

**问题 1.13** 证明全纯版本的 **Brouwer 不动点定理** (2.5), 如果函数  $f: \mathbb{D}^2 \rightarrow \mathbb{D}^2$  满足在单位闭圆盘  $\mathbb{D}^2$  上连续, 单位开圆盘内  $\mathbb{D}^2$  内全纯, 则  $f$  一定有一个不动点, 且比 *Brouwer* 不动点定理更强的是, 这样的不动点只有一个. (提示: 利用 *Rouché* 定理, 在边界上,  $|z - (f - z)| < |z|$ , 这说明  $f - z$  的按重数计算的零点数目和  $z$  的零点数目相同. 一般 *Brouwer* 不动点定理的证明中已经有边界控制内部的“意思”了.)

**习题 1.14** 举例说明 *Brouwer* 不动点定理在开圆盘上不成立. 即存在全纯的  $f: \mathbb{D}^2 \rightarrow \mathbb{D}^2$  使得  $f$  没有不动点. (提示: 通过全纯同构到上半平面  $\mathbb{H}^2$ , 然后平移.)

**问题 1.15** 证明整个复平面上没有零点的全纯函数  $f(z)$  一定形如  $e^{g(z)}$ . (提示: 我们想要取对数, 为此, 我们先制造对数导数, 这无关对数是否存在, 是完全形式的,  $\frac{f'}{f}$ , 这样在复平面上无限制地积分即可. 当然, 这也可以用提升定理

的语言来解释, 考虑交换图

$$\left[ \begin{array}{ccc} & & \mathbb{C} \\ & \nearrow g & \downarrow \exp \\ \mathbb{C} & \xrightarrow{f} & \mathbb{C} \setminus \{0\} \end{array} \right]. \text{ 如图1.9. )}$$

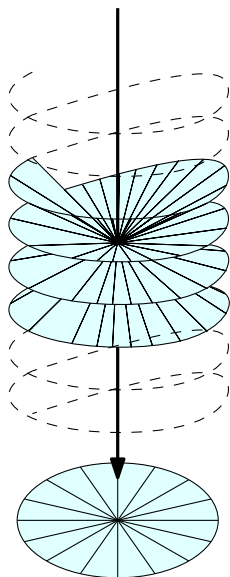


Figure 1.9: 复平面的指数映射

**问题 1.16** 对于一条平面上的简单闭曲线  $p$  (即不自交的回路), 我们怎样才能定义其“内部”和“外部”? 直觉让我们相信

$$\text{内部} = \{x \in \mathbb{R}^2 : \text{ind}_x p \neq 0\} \quad \text{外部} = \{x \in \mathbb{R}^2 : \text{ind}_x p = 0\}.$$

如果  $p$  光滑的话, 证明:

- 上述两集合是开集. (提示: 局部扰动  $x$  而不碰到  $p$ , 不会改变旋转指数, 因为旋转指数是一个整数.)
- 局部上,  $p$  的两边分别是内部和外部, 或者说

$$\overline{\text{内部}} \cap \overline{\text{外部}} = p \text{ 的图像}$$

且  $p$  关于内部的点旋转指数都是 1 或者都是  $-1$ . (提示: 局部上看, 外侧绕和内测绕会恰相差 1. 如图1.10)

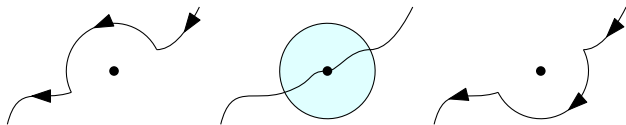


Figure 1.10: 内部与外部

- 上述两集合是道路连通的. (提示: 用直线相连可得和  $p$  的一串交点, 将第一个交点和最后一个交点在  $p$  上联结起来, 然后“沿着”边界属于自身的那一侧走.)

于是  $p$  的图像分  $\mathbb{R}^2$  为两个连通分支, 且各自的边界都是  $p$  的图像. 试用这一事实解释, 对不在  $p$  图像上的点  $x$ , 与“很远”的地方连一条“一般”的线, 与  $p$  的交点的数目的奇偶性可以区分  $x$  在  $p$  的内部还是外部. (提示: 所谓一般的线, 指的是永不和  $p$  相切, 否则, 穿过  $p$  后可能不改变所在连通分支. 幅角原理提示我们我们“圈数”和“原像数目”的关系, 这里又提醒我们“圈数”和“交点数目”的关系, 这也是映射度理论关心的.)

[1] W.Rudin. *Real and complex analysis*.

[2] 龚昇. 简明复分析. S.Gong. *Concise complex analysis*.

[3] W.Warner. *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups*.

# Chapter 2

## 一维圆周 $\mathbb{S}^1$

一般地,  $n$  维 **球面**  $\mathbb{S}^n$  被定义作

$$\{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^n : x_1^2 + \dots + x_n^2 + x_{n+1}^2 = 1\}.$$

这是  $n + 1$  维单位原盘  $\mathbb{D}^{n+1}$  的边界. 特别地, 称  $n = 1$  时,  $\mathbb{S}^1$  被称为 **圆周**. 在一些时候我们将其考虑成  $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$  会非常方便.

作为拓扑空间  $\mathbb{S}^1$  上有诱导自  $\mathbb{R}^2$  的拓扑, 因为  $\mathbb{S}^1$  是有界闭集, 从而  $\mathbb{S}^1$  是紧致的. 不过在此之前, 我们先关心一下  $\mathbb{S}^1$  的其他构造方式.

**定理 2.1** 单位化映射, 如图 2.1,

$$\nu : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{S}^1 \quad x \longmapsto |x|$$

是商映射, 换言之,

$$\mathbb{S}^1 \cong_{\text{同胚}} \mathbb{R}^2 / \sim, \quad \text{其中 } u \sim v \iff \exists \lambda > 0, u = \lambda v.$$

**证明** 我们要证明对于  $U \subseteq \mathbb{S}^1$ , 如果  $\nu^{-1}(U)$  开, 则  $U$  开. 这源自于以下事实, 任意  $x \in \mathbb{S}^1$ , 都有其在  $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  中的邻域  $V$  使得  $\nu(V) = V \cap \mathbb{S}^1$ .  $\square$

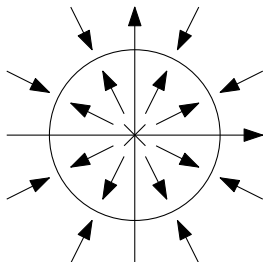


Figure 2.1: 单位化映射

基本群理论的基本结果是  $\pi_1(S^1, *) \cong \mathbb{Z}$ , 其中  $*$   $\in S^1$ , 对应的生成元正是从  $*$  逆时针出发环绕  $S^1$  一周的回路, 称之为 [转 1 圈] 的话, 对应的乘法是

$$[\text{转 } n \text{ 圈}] + [\text{转 } m \text{ 圈}] = [\text{转 } n + m \text{ 圈}].$$

实际上这一同构再一次得到 **旋转指数** 的概念, 注意到单位化映射  $x \mapsto |x|$  给出  $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  到  $S^1$  的同伦等价, 从而任意不经过 0 的回路  $p$ , 可以定义

$$\text{ind}_0 p = \varphi([p]).$$

其中  $\varphi : \pi_1(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) \cong \pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$ . 当然, 这比前面定义得更广, 我们这里只需要假设  $p$  是连续的, 之前则需要假设可以定义曲线积分 (例如, 分段可微).

关于基本群的基本推导过程非常重要, 我们在这里简单重述一下. 我们需要考虑著名的 **指数映射**

$$\exp : \mathbb{R} \longrightarrow S^1 \quad x \longmapsto e^{2\pi i x} = \cos x + i \sin x.$$

假如我们将实数轴“对好”, 弯成“电话线”的形状, 指数映射就是将其“拍扁”, 如图2.2. 证明的关键在于任意  $x \in S^1$ , 都存在  $x$  的邻域  $U$  使得  $\exp^{-1}(U)$  形如一些  $U$  的无交并, 这就确保我们可以将任何一条  $S^1$  中的道路慢慢“挪回” $\mathbb{R}$  中, 这被称为 **提升**. 这个过程很像“让  $S^1$  在  $\mathbb{R}^1$  上滚动”—我们只需要关心每一时刻和  $\mathbb{R}^1$  接触的点附近的情况即可, 如图2.3. 这样“转了几圈”就如实反映在这条道路行走的“距离”中了.



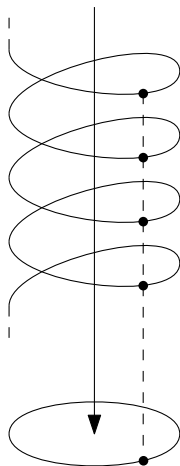


Figure 2.2: 指数映射

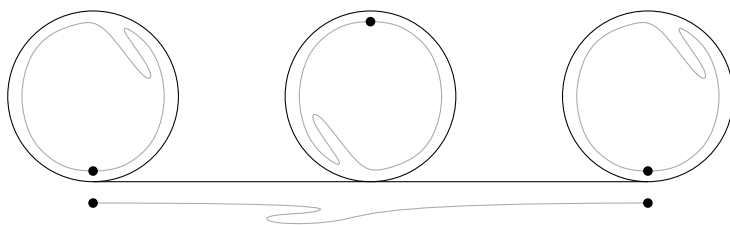


Figure 2.3: 道路提升

用覆叠空间的语言说,  $\mathbb{R}^1 \xrightarrow{\exp} \mathbb{S}^1$  给出了  $\mathbb{S}^1$  的万有覆叠空间, 对应基本群在  $\mathbb{R}^1$  上的作用透过同构表达为

$$[p] \cdot x = x + n \quad \text{假设 } \pi_1(\mathbb{S}^1, *) \cong \mathbb{Z} \text{ 中 } [p] \mapsto n.$$

一类有趣的问题是圆周的单点并的基本群.

**定理 2.2** 任意集合  $I$ , “ $|I|$  那么多个圆周的单点并”的基本群

$$\pi_1\left(\bigvee_{i \in I} \mathbb{S}_i^1, *\right) = I \text{ 生成的自由群.}$$

其中  $*$  是粘合的点, 其中每个  $S_i^1 \cong_{\text{同胚}} S^1$ .

**证明** 这当然是 **van Kampen 定理** 的使用. 但是直接使用, 问题有三.

- van Kampen 定理只有二元情形, 没有一般指标的情形. 为了解决这个问题, 我们采取归纳法, 每次多粘合一个  $S^1$ .
- 使用条件中要求内部的并是全空间, 不能直接对各  $S_i^1$  使用. 为了解决这个问题, 我们只需要在每个  $S_i^1$  的基点  $*$  附近挑选可缩无害的开集  $U_i$ , 再改用  $X_i \cup \bigvee_{i \in I} U_i$  即可.
- van Kampen 定理最多只能计算有限的情形. 为了解决这个问题, 我们仅需注意到每一条道路不会出现在无穷个  $S_i^1$  中.

问题的解决不过是点集拓扑以及集合论层面的验证. □

这能间接蕴含自由群的子群皆自由的结论, 因为, 根据覆叠空间的理论, 所有而能够叠成单点并的图形皆为 1 维 CW-复形, 他们均同伦于单点并. 这在代数中被称为 **Nielsen-Schreier 定理**, 见问题 2.7.

这条结论可以丰富我们对于自由群的理解. 以二元为例, 单点并正是著名的  $\infty$  形空间. 假如左侧记为  $S_x^1$  右侧记为  $S_y^1$ , 那么例如对应二元自由群中的文字  $x^{-1}yxy$  就表示“右逆时针绕一圈, 左逆时针绕一圈, 右逆时针绕一圈, 左顺时针绕一圈”.

**作为微分流形** 注意到,  $S^1$  是由方程  $x^2 + y^2 = 1$  定义的, 记  $f(x, y) = x^2 + y^2 - 1$ , 因为梯度  $\text{grad } f = \left( \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right)$  在圆周上处处不为 0, 从而  $S^1$  有唯一的 1 维微分流形结构使得包含映射  $S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$  是嵌入子流形.

外蕴地看, 写出微分式, 在  $S^1$  上,

$$0 = df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = 2(xdx + ydy),$$

左边为 0 是因为  $S^1$  上  $f$  恒为常数 0. 这直接指出  $(x, y)$  在  $S^1$  上运动时,  $dx$  和  $dy$  的依赖关系. 这还表明以下信息

- 如果理解作内积, 则说明  $(x, y)$  总垂直于  $x, y$  的微小变化. 换句话说, 场  $N = (x, y)$  构成  $S^1$  的单位外法向量场, 每一点  $(x, y) \in S^1$  指定的法向量正是  $(x, y)$ “自身”.

- 将这个场统一逆时针旋转  $90^\circ$ , 得到的场  $T = (-y, x)$  就构成  $S^1$  这一点的单位切向量场. 这说明  $S^1$  上面的“毛”是能够抚“平”的, 但是二维球面  $S^2$  则不然 —  $S^2$  上不存在处处不为零的切向量场, 如图2.4. 此即著名的毛球定理.

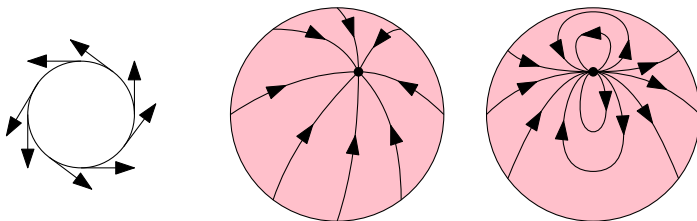


Figure 2.4:  $S^1$  上的处处不为零的切向量场和  $S^2$  上失败的尝试

- 继承自  $\mathbb{R}^2$  的弧长微元  $ds$  应该满足

$$ds^2 = dx^2 + dy^2$$

我们前面定义的  $d\theta = \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$  限制在其上得到的  $xdy - ydx$  恰满足条件, 这符合我们  $\theta$  就是“弧长”的直觉.

- 因此, 对于道路  $p: [0, 1] \rightarrow S^1$ , 假设  $p(t) = (x(t), y(t))$  可以计算

$$p \text{ 的“本质长度”} = \int_0^1 ds \circ p = \int_0^1 xdy - ydx = \int_0^1 (xy' - yx')dt$$

这里“本质长度”不是通常意义下的长度 — “倒着走”长度是负的, “来回走”是抵消的. 再度回看旋转指数的积分定义, 实际上是在计算回路的“本质长度”.

注意到  $S^1$  作为  $\mathbb{C}$  的子集关于复数乘法做成一个群, 从而构成一个 Lie 群. 如果将每一点  $z$  的切空间作如下等同

$$\begin{array}{ccc} \text{Tan}_z S^1 \text{ -等同-} & \mathbb{R} \cdot T_z & \\ \downarrow d\iota & \downarrow \subseteq & \\ \text{Tan}_z \mathbb{R}^2 \text{ -等同-} & \mathbb{C} & \end{array} \quad \text{其中} \quad \begin{cases} T_z = iz \text{ 即 } T_{x+yi} = -y + xi \\ \iota: S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2 \text{ 是包含映射} \end{cases}$$

不难顺着交换图计算出, 左乘  $w \in \mathbb{S}^1$  在切空间上表现为

$$d(w \cdot *) : \mathbb{R} \cdot T_z \longrightarrow \mathbb{R} \cdot T_{wz} \quad v \longmapsto w \cdot v$$

从而对应的左不变向量场正是由  $T = [z \mapsto iz \subseteq \mathbb{R} \cdot T_z] \in \text{Vec}(\mathbb{S}^1)$  张成的. 任意取一个左不变向量场  $X$ , 假如  $X = xT$ , 其中  $x \in \mathbb{R}$ , 我们来计算指数映射. 经过 1 关于  $X$  的积分曲线  $s(t)$  应满足

$$\frac{ds}{dt}(t) = X_{s(t)} \quad \text{即} \quad \frac{ds}{dt} = xi \cdot s$$

这样方程的解正是  $s(t) = e^{txi}$ , 因此总结起来, 关于指数映射有如下结果

$$\begin{array}{ccc} \text{Tan}_1 & \xrightarrow{\text{等同}} & i\mathbb{R} \\ \text{指数映射} \downarrow & & \downarrow i x \mapsto e^{ix} \\ \mathbb{S}^1 & \xlongequal{\quad} & \mathbb{S}^1 \end{array}$$

因此, 对于圆周来说, Lie 群的指数映射真的是一个指数映射.

**作为代数集** 从代数的角度看,  $\mathbb{S}^1$  是由方程  $x^2 + y^2 = 1$  定义的, 但是这不能说明  $x^2 + y^2 - 1$  就是“最简”的, 例如  $(x^2 + y^2 - 1)^2$  也定义了  $\mathbb{S}^1$ . 下面的定理说明了  $x^2 + y^2 - 1$  是“最简的”.

**定理 2.3** 如果实二元多项式  $f(x, y)$ , 那么

$$\forall (x, y) \in \mathbb{S}^1, f(x, y) = 0 \iff x^2 + y^2 - 1 \mid f(x, y).$$

**证明** 右推左方向是容易的. 要说明反面, 我们采取带余除法论证. 将  $f$  和  $x^2 + y^2 - 1$  视作  $x$  的函数, 因为  $x^2 + y^2 - 1$  首项系数是 1, 可以找到  $q(x, y), r(x, y)$  使得

$$f(x, y) = q(x, y)(x^2 + y^2 - 1) + r(x, y)$$

且  $r(x, y)$  关于  $x$  的次数不超过 1, 因而不妨设  $r(x, y) = a(y)x + b(y)$ . 条件说明任意  $(x, y) \in \mathbb{S}^1$  都有  $r(x, y) = 0$ . 我们寄希望于证明  $r = 0$ . 注意到, 有无限个  $y_0$  使得关于  $x$  的“一次”方程  $r(x, y_0) = a(y_0)x + b(y_0)$  有两个解, 如图 2.5, 这足以说明  $r = a = b = 0$ .  $\square$

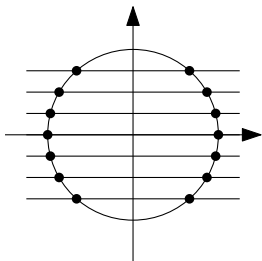


Figure 2.5: 有无限个两解

上面的证明中只用到了  $\mathbb{R}$  是无限域的条件, 这提示我们对任何无限域都可以用这样的论证, 这就是所谓 **Noether 正规化** 过程最简单一例, 稍微复杂一些的可见习题 2.11. 如果代数闭域上, **Hilbert 零点定理** 为我们指出, 所有可疑的, 例如这里的  $(x^2 + y^2 - 1)^2$  这样的, 方程都可以通过取根式理想来消除.

将  $\mathbb{S}^1$  放在  $\mathbb{Q}^2$  上看会是很有意思的. 熟知 **勾股方程**

$$x^2 + y^2 = z^2$$

除去  $z = 0$  的平凡解, 我们总可以把解  $(x, y, z)$  映射为  $(\frac{x}{z}, \frac{y}{z})$  搬动到  $\mathbb{S}^1$  上. 这个过程还是可逆的 (当然, 重新得回的整数解会相差一些有理数), 于是寻找勾股方程的整数解的问题就变成寻找  $\mathbb{S}^1$  上有理点的问题. 这时就体现出代数的威力所在.

**命题 2.4** 对于圆周上任意点  $P = (x, y) \neq (-1, 0)$ , 那么  $P$  是有理点当且仅当  $P$  和  $(-1, 0)$  所连直线的斜率  $\frac{y}{x+1}$  是有理数. 如图 2.6.

**证明** 这需要好好回忆高中的解析几何. 一方面是容易的, 为了看到斜率的论证, 假设这条直线是  $\ell: y = k(x + 1)$ . 带入  $x^2 + y^2 = 1$  可得  $x$  的方程

$$x^2 + k^2(x + 1)^2 = 1 \quad \text{整理得} \quad (k^2 + 1)x^2 + 2k^2x + k^2 - 1 = 0.$$

显然,  $x = -1$  是一个平凡解, 利用 Vieta 定理得到另一个解是  $x = \frac{k^2 - 1}{k^2 + 1}$ , 带回  $\ell$  的方程知道  $y = \frac{2k}{k^2 + 1}$ , 皆为有理数.  $\square$

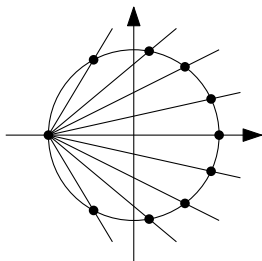


Figure 2.6: 有理点等价于斜率有理

通过以上似乎打开了解不定方程的大门, 但是试图迁移过程到其他方程上便会发觉下述困难.

- 上述方法仅对齐次三元二次方程奏效, 或者用代数几何的语言说, 仅对射影平面  $\mathbb{P}^2$  中的二次曲线有效.
- 上述过程仅断言若存在解, 则解无限, 但并未断言解的存在性.

想要顺着这条路继续向前, 还有很多路需要前进.

**圆周上的映射度** 最后我们花一点时间来总结目前为止我们已经知道的关于旋转圈数的理解方式.

- 理解成旋转的“总角度”, 见第1章的 (\*).
- 理解成复积分环绕极点“重数”, 见第1章的 (1.6).
- 理解成基本群的元素, 见本章前半部分.
- 理解成走过的“本质长度”, 见本章中段.

方便起见, 以上种种理解都归结到“一个映射  $S^1 \xrightarrow{f} S^1$ , 究竟绕了几圈”这个问题上, 我们改称这个圈数是  $f$  的**映射度**, 记为  $\deg f$ .

以上总将其理解为整体性质, 下面我们从局部上来说明这件事. 对于一个映射  $S^1 \xrightarrow{f} S^1$ , 我们可以在  $S^1$  的某一点处设立一个“收费站”, 每经过一次就记录一次, 但是这同样有“来回走”的问题, 因此我们还需要记录是“正着过

的”还是“倒着过得”，那么旋转圈数就应该是正向通过的次数减去反向通过的次数，如图2.7.

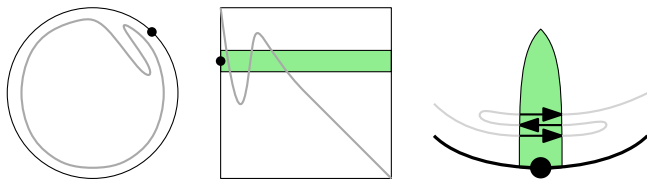


Figure 2.7: 收费站

问题在于我们如何定义方向？假如  $f$  可微，定义正向是指自变量和因变量旋转方向相同. 或者稍费一些记号，如果记角度微分是  $d\theta$ ，那么应该定义

$$\text{正向通过} \iff \frac{d(\theta \circ f)}{d\theta} = \frac{d\theta \circ f}{d\theta} > 0$$

这样，按照我们的直觉，任意挑选一个点  $x_0 \in \mathbb{S}^1$ ，那么

$$\deg f = \sum_{t \in f^{-1}(x_0)} \operatorname{sgn} \left( \frac{d\theta \circ f}{d\theta}(t) \right)$$

但是恼人的是，对 (可能) 很多  $t$ ，我们无法判定  $t$  经过  $f(t)$  时是正向的还是反向的，这时导数为 0，这被称为**临界点**，假如  $x_0$  的原像恰好是临界点，那么我们无法判断方向，如图2.8. 著名的 Sard 定理断言，这样的临界点的像 (称为**临界值**) 是很少的，甚至在某种意义上是零测的，这让这种理解方式有了继续的可能.

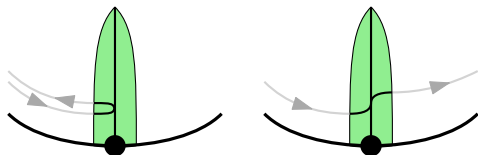


Figure 2.8: 临界点的情形

注意到上面的理解方式将映射度，或者旋转指数理解为“原像的个数”，这和上一章提到的幅角原理就有了一些若隐若现的联系，这就是所谓的映射度理论.

假如我们将  $\pi_1(S^1, *)$  的元素换一种理解方式, 把原本的回路“收尾相接”变成圆周, 从而  $\pi_1(S^1, *)$  中的元素是一些  $S^1 \rightarrow S^1$ , 且  $* \mapsto *$  的等价类. 我们会发现, 基本群的理论实质上是说, 映射度分类了  $S^1 \rightarrow S^1$  的同伦类.

最后让我们以一个著名的不动点定理收尾, 习题中有一些经典应用.

**定理 2.5 (Brouwer 不动点定理)** 单位闭圆盘的连续映射  $\mathbb{D}^2 \xrightarrow{f} \mathbb{D}^2$  一定有不动点.

**证明** 作函数  $\mathbb{D}^2 \xrightarrow{F} S^1$ , 将  $x$  映射为  $f(x)$  与  $x$  所连射线与  $S^1$  的交点, 如果没有不动点这是可以做到的. 注意到

$$[S^1 \xrightarrow{\subseteq} \mathbb{D}^2 \xrightarrow{F} S^1] = [S^1 \xrightarrow{\text{id}} S^1],$$

同时取基本群得到  $[\mathbb{Z} \rightarrow 0 \rightarrow \mathbb{Z}] = \text{id}$ , 天方夜谭! □

这点的直观在于如果没有不动点, 这样构造的  $F$  一定会将  $\mathbb{D}^2$  拉出一个洞来, 而探测洞的方法就是利用基本群.

**习题 2.6** 证明  $f: S^1 \rightarrow S^1$  是零伦的 (即同伦于常映射), 当且仅当存在延拓  $\mathbb{D}^2 \xrightarrow{g} S^1$  使得  $g|_{S^1} = f$ . (提示: 按照定义写出零伦的定理, 将映为同一个点的点粘起来就得到  $\mathbb{D}^2$ . 这也是“锥形”的标准结论.)

**问题 2.7 (Nielsen-Schreier)** 回忆基本群的如下理论.

- 基本群的子群都来自其上覆叠的基本群. 具体来说,  $\pi_1(X, x_0)$  的子群都同构于  $\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ , 其中  $(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow (X, x_0)$  是覆叠映射. 且叶数等于指数.
- 任何图, 或曰 1 维 CW-复形都同伦于圆周的单点并. 且圆周的数目等于  $1 + (\text{边数}) - \text{顶点数}$ .

利用以上两则事实证明所有自由群的子群都是自由群, 且  $n$  元自由群指数为  $p$  的子群恰是  $pn - p + 1$  维自由群. (提示: 问题的关键变成, 如果  $\tilde{X}$  到圆周的单点并是覆叠映射, 那么  $\tilde{X}$  必定是一个图, 这直接验证即可. 最后, 有限的情形需要一些计数, 注意到, 圆周的单点并想要当做 CW-复形考虑需要在每个圆周上再分一个点, 于是



	点	边	___元自由群
$n$ 个圆周单点并	$n + 1$	$2n$	$n$
覆盖	$p(n + 1)$	$2pn$	$1 + 2pn - pn - p$

其中覆盖的叶数自然确保点和边的数目翻倍.)

**习题 2.8** 从二元自由群中构造一个子群, 这个子群不是有限生成的. (提示: 假如文字是  $x, y$ , 那么考虑  $xyx^{-1}, x^2yx^{-2}, \dots$  生成的群, 几何意义是用不同的方法绕  $y$ . 如图 2.9, 可以在图上看出,  $xyx^{-1}$  是“下楼去绕下面地下一层的  $y$ ”,  $xyx^{-2}$  是“下楼去绕负二层的  $y$ ”. 既然知道是可数元素生成的, 问题变成能否有限生成呢? 这通过交换化变成交换代数, 例如, 张量以  $\mathbb{Q}$  变成线性空间得到矛盾.)

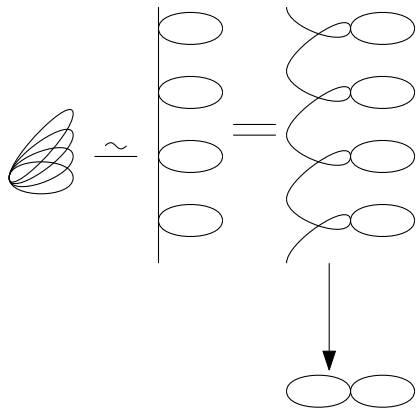


Figure 2.9: 二元自由群的无限自由子群

**习题 2.9** 证明  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  作为乘法 Lie 群, 对应的指数映射也真的是一个“指数映射”.

**问题 2.10** 证明一维连通 Lie 群只有  $S^1$ . (提示: 任意一维连通 Lie 群  $G$ , 考虑指数映射  $\exp: \mathbb{R} \rightarrow G$ , 根据指数映射的定义和单参数指数群的性质,  $\exp$  是一个群同态, 这样, 变成  $\mathbb{R}$  的子群分类问题. 熟知  $\mathbb{R}$  子群或形如  $r\mathbb{Z}$  或稠密. 前者正“卷”出  $S^1$ , 后者则与指数映射局部同胚性质相悖.)

**习题 2.11** 考虑双曲线  $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 1\}$ , 证明和 (2.3) 类似的结论. 如果实二元多项式  $f(x, y)$ , 那么

$$\forall (x, y) \in C, f(x, y) = 0 \iff xy - 1 \mid f(x, y)$$

(提示: 这里并不能直接使用带余除法, 需要做小小的换元, 例如  $y = x + z$  变  $xy - 1$  为  $x^2 + xz - 1$ , 这样  $x$  前的系数就被修正为 1.)

**问题 2.12 (牵引引理)** 证明, 如果连续函数  $f: \overline{\mathbb{D}^2} \rightarrow \mathbb{R}^2$  满足

$$\forall x \in S^1, \quad |f(x) - x| < \epsilon$$

那么  $(1-\epsilon)\overline{\mathbb{D}^2} \subseteq f(\overline{\mathbb{D}^2})$ , 如图 2.10. (提示: 如果不然, 例如  $y \in (1-\epsilon)\overline{\mathbb{D}^2} \setminus f(\overline{\mathbb{D}^2})$ , 将  $f(x)$  和  $y$  的射线交到  $S^1$  上的点记为  $F(x)$ , 那么  $f(x)$  总在  $y$  “两侧”, 且  $f(x)$  和  $x$  很近, 这就与 Brouwer 不动点定理矛盾. 这表明, 如果  $f$  和  $x$  边界变化不大, 那么内部也变化不大.)

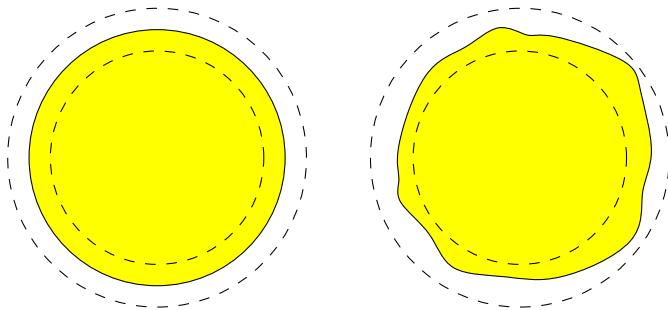


Figure 2.10: 牵引引理

**问题 2.13** 证明: 奇映射的映射度是奇数. 即, 对于  $f: S^1 \rightarrow S^1$  满足  $f(x) = -f(-x)$ , 那么  $\deg f$  是奇数. (提示: 用道路提升证明提升上去一定在  $\mathbb{R}$  上“走了奇数步”. 或者用平方映射  $q: S^1 \xrightarrow{z \mapsto z^2} S^1$ , 利用覆叠空间的提升定理,  $f$  将分解为  $q \circ \tilde{f}$ , 这就破坏了条件.)

**问题 2.14 (Borsuk-Ulam 定理)** 证明, 对每个连续映射  $S^2 \xrightarrow{f} \mathbb{R}^2$ , 都有“对径点”映为同一个点, 即某个点  $x$  使得  $f(x) = f(-x)$ . (提示: 否则, 作差并单位化得到  $F: S^2 \rightarrow S^1$ , 在  $S^2$  选择一个“大圆”, 根据上一题限制在圆周上度数是奇数, 但是这个大圆却可以缩成一点, 从而零伦, 如图 2.11. 这被解释为地球上一定有对径的两点具有相同的气温和湿度.)

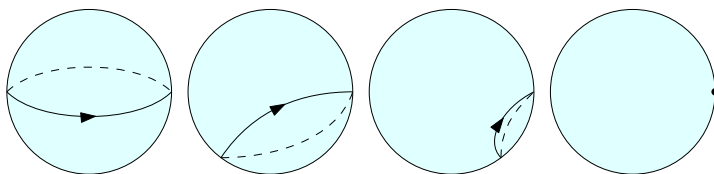


Figure 2.11: 一个在  $S^2$  内自由扭动的回路

**习题 2.15** 将  $S^2$  写成三个闭集的并, 一定某一块含有对径点, 即一定存在  $x$  使得  $x, -x$  同时落在某一块里面. (提示: 考虑到其中两块的距离函数, 然后用上面的 Borsuk-Ulam 定理.)

**问题 2.16** 用基本群证明代数基本定理. (提示: 将多项式看做是  $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow S^1$  的形式, 从原点向外的每一层  $xS^1$ , 在  $x$  从 0 变动到  $\infty$  时给出了常数到  $[z \mapsto z^n]$  的同伦, 这就是一个矛盾.)

[1] Glen E. Bredon. *Topology and Geometry*.

[2] John W. Milnor. *Topology from the Differentiable Viewpoint*.

[3] Joseph H. Silverman. *A friendly introduction to number theory*.

[4] A. Hatcher. *Algebraic Topology*.

# Chapter 3

## 二维球面 $S^2$

下面我们介绍二维球面  $S^2$ , 这里我们会发现很多与  $S^1$  不同的性质.

**作为拓扑空间** 首先, 在1.3我们就知道  $S^2$  可以理解为单点紧致化  $\mathbb{R}^2 \sqcup \{\infty\}$ , 这样, 在球面上任意“戳破一个点”, 都变成容易操作的平面.

熟知球面的基本群是平凡的, 这可以用 van Kampen 定理论证, 如图3.1, 也可以用下面的证明.

**定理 3.1** 球面  $S^2$  的基本群  $\pi_1(S^2, *)$  是平凡的.

**证明** 任给一条回路  $[0, 1] \xrightarrow{p} S^2$ . 如果不是满的, 可以扎破一个洞变回  $\mathbb{R}^2$  上论证. 一般情况, 我们选择光滑函数  $[0, 1] \xrightarrow{p} S^2$ , 使得

$$\inf_{x \in [0, 1]} \|p(x) - q(x)\| < \epsilon \quad p(0) = q(0) \quad p(1) = q(1)$$

此时  $p$  与  $q$  是同伦的, 因为两两之间可以以最短圆弧相连, 这将得到一个  $p$  到  $q$  的同伦. 这一操作是合理的, 只要  $\epsilon$  足够小, “最短路径”的选择不会发生的突变. 熟知不存在低维到高维的满的光滑函数, 参见习题3.6.  $\square$

当然, 同样的方法, 这还可证明  $k < n \Rightarrow \pi_k(S^n, *) = 0$ .

目前为止我们容易知道和想得到的  $S^n$  同伦和同调群可列表如下.

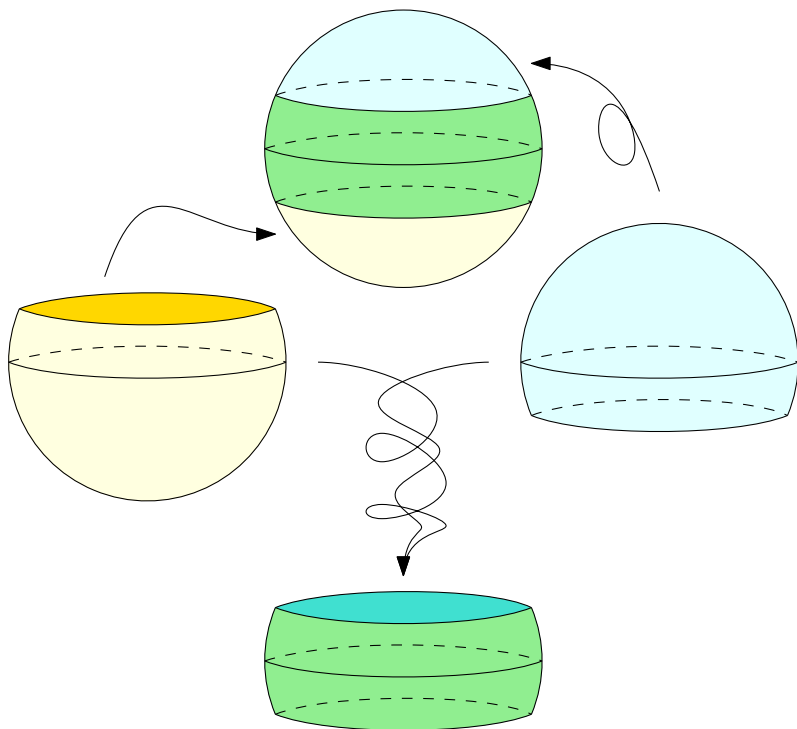


Figure 3.1: 用 van Kampen 定理证明球面基本群平凡

	$\pi_1$	$\pi_2$	$\pi_3$	...
$\mathbb{S}^1$	$\mathbb{Z}$	$0$	$0$	...
$\mathbb{S}^2$	$0$	$\mathbb{Z}$	$?$	...
$\mathbb{S}^3$	$0$	$0$	$\mathbb{Z}$	...
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

	$H_1$	$H_2$	$H_3$	...
$\mathbb{S}^1$	$\mathbb{Z}$	$0$	$0$	...
$\mathbb{S}^2$	$0$	$\mathbb{Z}$	$0$	...
$\mathbb{S}^3$	$0$	$0$	$\mathbb{Z}$	...
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

其中

- 同伦表格第一行的确定是因为  $\mathbb{S}^1$  具有可缩的万有覆盖  $\mathbb{R} \xrightarrow{\exp} \mathbb{S}^1$ , 根据提升引理, 不难证明. 当然, 直接用同伦的长正合序列也可得到.
- 同伦表格对角线即著名的 **Hopf 定理**, 任何连通可定向紧致流形到  $\mathbb{S}^n$

的同伦类由映射度决定. 特别地,  $\deg$  是  $\pi_n(S^n, *)$  到  $\mathbb{Z}$  的群同构.

- 同伦表格对角线下方全是 0, 这是我们上面 (3.1) 利用光滑逼近的方法得到的.
- 同调表格的确定是利用 **van Kampen 定理** 的类似物 — **Mayer-Vietoris 序列** 得到. 准确来说, 如果  $m, n \geq 1$ , 那么  $H_n(S^m) = \begin{cases} \mathbb{Z} & m = n \\ 0 & m \neq n \end{cases}$ , 而 0 维情况的平凡而特殊.

读者会猜想“神秘的问号”处是 0, 然而事实并不是这么简单. 实际上,  $\pi_3(S^2) \cong \mathbb{Z}$ , 我们会在下面 (7.1) 看到.

作为微分流形 球面  $S^2$  成为微分流形和  $S^1$  成为微分流形的理由一样. 我们下面计算其面积元.

**命题 3.2** 球面上  $S^2$  诱导的面积元是

$$zdx \wedge dy + xdy \wedge dz + ydz \wedge dx.$$

**证明** 当然暴力计算当然可以, 不过面积元正通过

$$dx \wedge dy \mapsto \frac{\partial}{\partial z} \quad dy \wedge dz \mapsto \frac{\partial}{\partial x} \quad dz \wedge dx \mapsto \frac{\partial}{\partial y}$$

和单位法向量等同. 球面的单位法向量正是  $(x, y, z)$ . □

有些时候我们需要取单位化的面积元, 即使得  $\int_{S^2}(\text{面积元}) = 1$ , 这需要计算球面的表面积, 参见习题3.7.

球面的 Gauss 曲率是常数 1, 这可从 Gauss 曲率定义直接看出, 因为 Gauss 映射是常数倍. 一般地, 半径为  $R$  的球面  $R \cdot S^2$  的 Gauss 曲率是  $\frac{1}{R^2}$ , 这是常曲率空间的一个例子.

球面  $S^2$  的测地线是那些“大圆”, 即  $S^2$  上那些圆心与  $S^2$  重合的圆.

- 因为测地线即那些主法向量和曲面法向量共线的弧长曲线, 故大圆一定是测地线.

- 根据测地线存在唯一的定理, 每一点每一个方向只能延伸出一条测地线, 故大圆给出所有的测地线.

于是大圆局部上是最短的, 这符合几何直观, 如图3.2. 实际上, 任意两点之间直接都有测地线相连. 当然这也是测地线未必最短的生动实例.

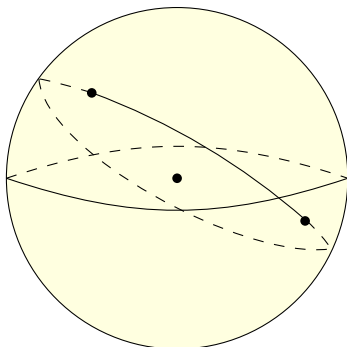


Figure 3.2: 球面的测地线

三维正交群  $SO_3 = SO(3)$  通过直接的矩阵作用在  $S^2$  上, 这个作用是保距, 正向的. 实际上所有保距保定向映射都来自于  $SO_3$ , 因为

- 如果保持一点和一个切向量不变, 那么一切都通过测地线推出, 换言之, 给出了测地坐标系的同构.
- $SO_3$  总能将一点搬动到任意一点, 也总能将一点的切向量搬动到任何一个方向 (不改变这一点).

回忆之前提到的球极投影图1.2, 下面我们来计算对应的第一基本形式, 我们会发现这是保角映射.

**命题 3.3** 球极投影的逆映射  $\mathbb{R}^2 \xrightarrow{\tau} S^2 \setminus \{(0, 0, 1)\}$  的第一基本形式为

$$I = \frac{4}{(x^2 + y^2 + 1)^2} (dx^2 + dy^2).$$

**证明** 这来自暴算. 设  $r^2 = x^2 + y^2$ , 基于对称性考虑一维的情形, 如图3.3. 计

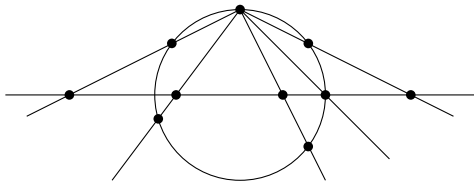


Figure 3.3: 球极投影

算出  $y = -\frac{1}{r}x + 1$  与  $x^2 + y^2 = 1$  的另一个交点是  $(\frac{2x}{r^2+1}, \frac{r^2-1}{r^2+1})$ . 这表明球极投影的逆映射为

$$(x, y) \mapsto \left( \frac{2x}{x^2 + y^2 + 1}, \frac{2y}{x^2 + y^2 + 1}, \frac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 + y^2 + 1} \right)$$

记这个映射为  $r$ . 下面暴算开始.

$$r = \frac{1}{x^2 + y^2 + 1} \begin{pmatrix} 2x & 2y & x^2 + y^2 - 1 \end{pmatrix}$$

$$r_x = \frac{1}{(x^2 + y^2 + 1)^2} \begin{pmatrix} 2x^2 - 2y^2 - 2 & 4xy & -4x \end{pmatrix}$$

$$r_y = \frac{1}{(x^2 + y^2 + 1)^2} \begin{pmatrix} 4xy & -2x^2 + 2y^2 + 2 & -4y \end{pmatrix}$$

然后利用高超的因式分解技巧得到

$$\langle r_x, r_x \rangle = \frac{4}{(x^2 + y^2 + 1)^2} = \langle r_y, r_y \rangle \quad \langle r_x, r_y \rangle = 0.$$

这样计算完成. □

这一结果表明球集投影是保角的, 这并不违背我们的直觉, 如图3.4. 实际上球极投影将  $S^2$  的圆映成  $\mathbb{R}^2$  中的圆 (或直线), 参见习题3.12.

**作为复流形** 我们曾将  $S^2$  等同于  $\mathbb{R}^2 \sqcup \{\infty\}$ , 这就导出数种复结构

- 看成  $\mathbb{R}^2$  的单点紧致化, 谈论全纯只需要我们加上“无穷远处”全纯的含义—称  $f(z)$  在无穷远处全纯, 如果  $f(1/z)$  在 0 处全纯. 换句话说, 坐标卡为

$$\begin{cases} \iota: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} & z \mapsto z, \\ j: \mathbb{C} \cup \{\infty\} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C} & z \mapsto 1/z. \end{cases}$$



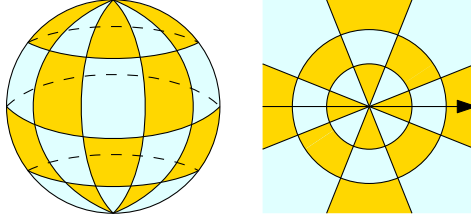


Figure 3.4: 球极投影保角

- 看成一维复射影空间  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ , 选择坐标卡为

$$\begin{cases} \varphi_1 : \{[z, w] \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 : w \neq 0\} \rightarrow \mathbb{C} & [z, w] \mapsto z/w, \\ \varphi_2 : \{[z, w] \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 : z \neq 0\} \rightarrow \mathbb{C} & [z, w] \mapsto w/z. \end{cases}$$

- 利用球极投影给出坐标

$$\begin{cases} \psi_1 : \mathbb{S}^2 \setminus \{(0, 0, 1)\} \rightarrow \mathbb{C} & x \mapsto x \text{ 与 } (0, 0, 1) \text{ 连线与复平面的交,} \\ \psi_2 : \mathbb{S}^2 \setminus \{(0, 0, -1)\} \rightarrow \mathbb{C} & x \mapsto x \text{ 与 } (0, 0, -1) \text{ 连线.} \\ & \text{与复平面的交的共轭} \end{cases}$$

这些都是一致的, 具体来说, 如果将上面三种坐标卡记为

$$\mathbb{C} \sqcup \{\infty\} : (W_1, \iota), (W_2, j), \quad \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 : (U_1, \varphi_1), (U_2, \varphi_2), \quad \mathbb{S}^1 : (V_1, \psi_1), (V_2, \psi_2).$$

可以选择同胚

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{S}^1 & \xrightarrow{f} & \mathbb{C} \sqcup \{\infty\} & \xrightarrow{g} & \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 \\ x & \mapsto & \psi_1(x) & & z \mapsto [z, 1] \\ (0, 0, 1) & \mapsto & \infty & & \infty \mapsto [1, 0] \end{array}$$

使得坐标卡都是一致的,

$$\begin{array}{ccccc} V_1 & \xrightarrow{f} & W_1 & \xrightarrow{g} & U_1 \\ & \searrow \psi_1 & \downarrow \iota & \swarrow \varphi_1 & \\ & & \mathbb{C} & & \end{array} \quad \begin{array}{ccccc} V_2 & \xrightarrow{f} & W_2 & \xrightarrow{g} & U_2 \\ & \searrow \psi_2 & \downarrow j & \swarrow \varphi_2 & \\ & & \mathbb{C} & & \end{array}$$

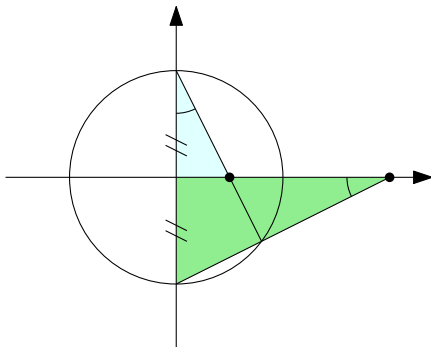


Figure 3.5: 球极投影

后一个交换图可以用图3.5呈现的初等几何论证.

这样我们可以放心地谈论  $S^2$  上的复结构, 此时我们称之为 **Riemann 球**. 于是复分析的一些概念和定理有了全新的含义.

- 熟知的 **Liouville 定理** 被转译为 Riemann 球上的全纯函数只有常数.
- 一个亚纯函数  $X \rightarrow \mathbb{C}$  都等同于一个亚纯映射  $X \rightarrow S^2$ .
- $S^2$  上全体的亚纯函数, 或者说  $S^2 \rightarrow S^2$  的全纯映射, 由有理分式给出.

对于可逆复矩阵  $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in \text{GL}_2(\mathbb{C})$ , 定义了全纯映射 (也是  $\mathbb{C}$  上的亚纯函数)

$$A : \mathbb{C} \sqcup \{\infty\} \longrightarrow \mathbb{C} \sqcup \{\infty\} \quad z \mapsto \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}.$$

这样的变换称为 **Möbius 变换**. 其对应的微分满足

$$dA = \frac{\det A}{(\gamma z + \delta)^2} dz \quad (\#).$$

故度量的关系是  $(du^2 + dv^2) = \frac{|\det A|^2}{|\gamma z + \delta|^4} (dx^2 + dy^2)$ .

典型的 Möbius 变换是如下四类.

**平移**  $z \mapsto z + \alpha$ , 对应的矩阵为  $\begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

**旋转**  $z \mapsto \epsilon z$ , 其中  $|\epsilon| = 1$ , 对应的矩阵是  $\begin{pmatrix} \epsilon & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

位似  $z \mapsto \lambda z$ , 其中  $\lambda \in \mathbb{R}$ , 对应的矩阵是  $\begin{pmatrix} \lambda & \\ & 1 \end{pmatrix}$ .

反演  $z \mapsto 1/z$ , 对应的矩阵为  $\begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & \end{pmatrix}$ .

他们也生成了所有的 Möbius 变换. 熟知, Riemann 球上的全纯自同构群由 Möbius 变换组成, 另注意到两个 Möbius 变换相同当且仅当相差数乘, 故这实际上说明 Riemann 球的全纯自同构群  $\text{Aut } \mathbb{S}^2$  是一阶射影变换群  $\text{PGL}_1(\mathbb{C})$ , 即  $\text{GL}_2(\mathbb{C})$  商去中心 (即数乘阵). Möbius 变换实际上也将圆 (或直线) 映为圆 (或直线).

对这些结论不确信的读者可参考习题3.14, 习题3.13, 问题3.15.

**例 3.4** 在复平面中有双射

$$\begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix} : \mathbb{D}^2 \longrightarrow \mathbb{H}^2 \quad \begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{pmatrix} : \mathbb{H}^2 \longrightarrow \mathbb{D}^2 \\ z \longmapsto \frac{z+i}{iz+1}, \quad w \longmapsto \frac{w-i}{-iw+1}.$$

其中  $\mathbb{H}^2$  是开的上半平面. 这对映射非常著名. 实际上这就是 Riemann 球沿着  $x$  轴方向的旋转. 注意到球极映射的对应是

$$\begin{cases} (1, 0, 0) \mapsto 1 & (1, 0, 0) \mapsto -1 \\ (0, 1, 0) \mapsto i & (0, -1, 0) \mapsto -i \\ (0, 0, 1) \mapsto \infty & (0, 0, -1) \mapsto 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \{(x, y, z) \in \mathbb{S}^2 : z < 0\} \leftrightarrow \mathbb{D}^2 \\ \{(x, y, z) \in \mathbb{S}^2 : y > 0\} \leftrightarrow \mathbb{H}^2 \end{cases}$$

如图 3.6, 再如图 3.7.

**例 3.5 (Blaschke 变换)** 对于  $|\alpha| < 1$ , 可定义 Blaschke 变换,

$$\begin{pmatrix} -1 & \alpha \\ -\bar{\alpha} & 1 \end{pmatrix} : \mathbb{D}^2 \longrightarrow \mathbb{D}^2 \quad z \longmapsto \frac{\alpha - z}{1 - \bar{\alpha}z}.$$

可直接初等验证其将  $\mathbb{D}^2$  映到  $\mathbb{D}^2$ .

Blaschke 变换来自一个初等的计算. 对于圆周上一点  $z$ , 过  $z$  和  $\alpha$  交圆周于另一点, 设这一点是  $w$ , 如图 3.8. 根据角度相同

$$\frac{w - \alpha}{w - \bar{\alpha}} = \frac{z - \alpha}{z - \bar{\alpha}}.$$

展开利用  $z \cdot \bar{z} = w \cdot \bar{w} = 1$  消去共轭并消去  $z = w$  的平凡情况, 不难得到

$$w = \frac{\alpha - z}{1 - \bar{\alpha}z}.$$

这作为分式线性变换当然可以延拓到整个  $\mathbb{S}^2$  上.

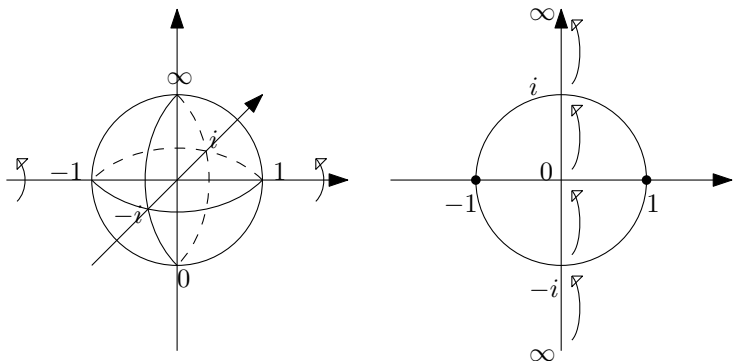


Figure 3.6: 圆盘到上半平面的映射

想要快速计算需要的 Möbius 变换, 需要使用交比的概念. 对于  $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{C} \sqcup \{\infty\}$ , 定义其 **交比** 定义作

$$(z_0, z_1; z_2, z_3) := \frac{\frac{z_0 - z_2}{z_0 - z_3}}{\frac{z_1 - z_2}{z_1 - z_3}} = \frac{(z_0 - z_2)(z_1 - z_3)}{(z_0 - z_3)(z_1 - z_2)} \in \mathbb{C} \sqcup \{\infty\}.$$

从定义出发可以直接验证下列性质.

- 交换  $z_0, z_1$  的地位会得到倒数, 交换  $z_2, z_3$  的地位会得到倒数, 交换  $(z_0, z_1)$  和  $(z_2, z_3)$  的地位会得到倒数.
- $(z, 1; 0, \infty) = z$ .
- 任何 Möbius 变换  $A$  都满足

$$(z_0, z_1; z_2, z_3) = (Az_0, Az_1; Az_2, Az_3).$$

任给相异三点  $z_1, z_2, z_3$ , 存在唯一的 Möbius 变换  $A$  使得

$$Az_1 = 1 \quad Az_2 = 0 \quad Az_3 = \infty.$$

实际上这个变换必须取作

$$z \mapsto Az = (Az, 1; 0, \infty) = (z, z_1; z_2, z_3).$$

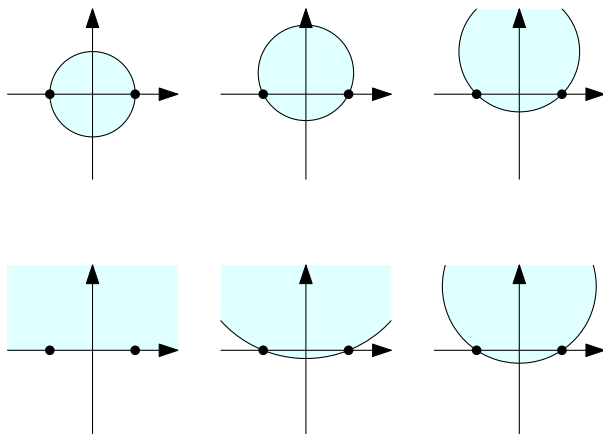


Figure 3.7: 圆盘到上半平面的映射

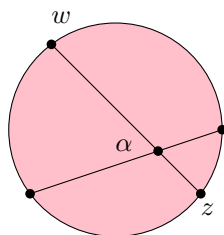


Figure 3.8: Blaschke 变换

这允许我们迅速地作出一个想要的 Möbius 变换.

**习题 3.6** 证明: 不存在  $[0, 1]$  到  $S^2$  的满的光滑函数. (提示: 可以直接  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  的光滑函数像无内部, 然后用 Baire 纲定理得到. 或者计算 Lebesgue 测度, 在每个紧致集上利用导数一致有界性, 用一系列小方块覆盖 — 给  $\mathbb{R}^2$  某一紧致集上的网格打了  $n^2$  那么多网格, 这条曲线最多经过  $2n$  个格, 这样“可疑部分”的体积以  $1/n$  级别下降. 当然, 测度的方法也可以转译为数学分析的语言, 如果处理得足够小心的话.)

**习题 3.7** 计算  $\mathbb{D}^n$  的体积和  $S^n$  的表面积. (提示: 这是数学分析,

$$\begin{aligned} \mu(\mathbb{D}^n) &= \int_{-1}^1 \mu(\sqrt{1-x^2}\mathbb{D}^{n-1})dx = \mu(\mathbb{D}^{n-1}) \int_{-1}^1 \sqrt{(1-x^2)^{n-1}}dx \\ &= \mu(\mathbb{D}^{n-1}) \cdot \int_0^1 (1-t)^{\frac{n-1}{2}} t^{\frac{1}{2}-1} dt = \mu(\mathbb{D}^{n-1}) \cdot B\left(\frac{n+1}{2}, \frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)} \mu(\mathbb{D}^{n-1}) = \dots = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})^n}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)} = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}. \end{aligned}$$

为了计算表面积, 一方面可以使用暴力球坐标换元, 更巧妙的方法是考虑体积的导数

$$S^{n-1} \text{ 的表面积} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\mu(x\mathbb{D}^n) - \mu(\mathbb{D}^n)}{x-1} = \frac{n\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}.$$

有时会写成更好看的  $\frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2})}$ .)

**问题 3.8** 如果  $S^2$  上由大圆围出的三角形夹角分别是  $\alpha, \beta, \gamma$ , 证明这个三角形的面积是  $\alpha + \beta + \gamma - \pi$ . (提示: 注意到  $S^2$  的面积是  $4\pi$ (3.7), 于是夹角为  $\alpha$  的两个大圆按比例分球面为四部分. 具体来说, 夹角为  $\alpha$  的“二边形”面积为  $4\pi \frac{\alpha}{2\pi} = 2\alpha$ . 下面考虑三个大圆围出的三角形面积是  $\Delta$ , 假设邻接的三个三角形面积分别是  $A, B, \Gamma$ , 对角分别是  $\alpha, \beta, \gamma$ , 那么可利用对称性得到如下方程

$$\begin{cases} A + B + \Gamma + \Delta = \frac{4\pi}{2}, \\ A + \Delta = 2\alpha, \\ B + \Delta = 2\beta, \\ \Gamma + \Delta = 2\gamma. \end{cases}$$

如图3.9, 于是  $\Delta = \alpha + \beta + \gamma - \pi$ . 当然, 利用 Gauss-Bonnet 定理也可以轻松知道, 因为 Gauss 曲率是常数 1,  $2\pi = (\pi - \alpha) + (\pi - \beta) + (\pi - \gamma) + \Delta$ .)

**问题 3.9** 利用上面的3.8证明 Euler 公式, 对于凸多面体

$$(\text{顶点数}) - (\text{棱数}) + (\text{面数}) = 2.$$

(提示: 首先, 不妨在多面体内部放置一个点光源, 将其照射到球面上. 同时, 注意到将多边形分成更小的三角形不减弱结论, 于是问题变成三角形的计数问

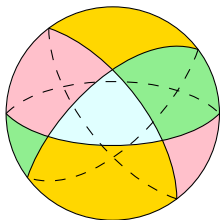


Figure 3.9: 球面三角形

题, 对球面面积进行两次计算, 得到

$$4\pi = (\text{顶点数}) \times 2\pi - (\text{顶点数}) \times \pi.$$

又因为是由三角形组成的, 每条棱相邻两个三角形, 所以

$$(\text{棱数}) \times 2 = (\text{面数}) \times 3.$$

二者联合可得结果.)

**习题 3.10** 在经典的微分几何中, 方程定义的曲面的基本形式有很简单的性质. 假如  $F(x, y, z) = 0$  定义了一张曲面. 通过隐函数定理解出  $z = f(x, y)$  再运算和原本  $F$  关系, 即

$$F(x, y, f(x, y)) = 0 \Rightarrow \begin{cases} F_x(x, y, f(x, y)) + F_z(x, y, f(x, y))f_x(x, y) = 0, \\ F_y(x, y, f(x, y)) + F_z(x, y, f(x, y))f_y(x, y) = 0. \end{cases}$$

即  $F_x + F_z f_x = F_y + F_z f_y = 0$ , 再带入

$$z = f(x, y) \quad dz = f_x dx + f_y dy$$

改成对称的形式. 不过需要注意, 如果固定定向为  $\text{grad } f$ , 那么大部分原本计算出现的绝对值是错误的, 因为这时不是局部的. 证明如下结论.

- $F_x dx + F_y dy + F_z dz = 0.$

微分关系

(提示: 直接微分, 或者用上式带入.)

$$\bullet n = \frac{\text{grad } f}{|\text{grad } f|}. \quad \text{单位法向量}$$

(提示: 这里需要注意,  $r = (x, y, f)$  计算出的  $r_x = (1, 0, f_x)$  和  $r_y = (0, 1, f_y)$  直接作外积得到的  $(-f_x, -f_y, 1) = F_z(F_x, F_y, F_z) = F_z \text{grad } f$  定向是否相同取决于  $F_z$  的正负.)

$$\bullet ds = (dx, dy, dz). \quad \text{弧长微分}$$

(提示: 这时直觉的, 直接计算  $r_x dx + r_y dy$  就是上式.)

$$\bullet I = dx^2 + dy^2 + dz^2. \quad \text{第一基本形式}$$

(提示: 这时直觉的, 因为第一基本形式就是弧长微分的长度. 一般地,  $I = (1 + f_x^2)dx^2 + 2(f_x f_y)dxdy + (1 + f_y^2)dy^2$ )

$$\bullet d\sigma = \frac{1}{|\text{grad } F|} (F_z dx \wedge dy + F_y dz \wedge dz + F_x dy \wedge dz). \quad \text{面积元}$$

(提示: 局部面积元算出来是  $\sqrt{\frac{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}{F_z^2}} dx \wedge dy = |\text{grad } F| \frac{|F_z| dx \wedge dy}{|F_z|^2}$ , 固定定向, 去掉绝对值, 再将相等的分式“分子分母同时相加”即可.)

$$\bullet \Pi = -\frac{1}{|\text{grad } F|} (dx, dy, dz) \begin{pmatrix} F_{xx} & F_{xy} & F_{xz} \\ F_{yx} & F_{yy} & F_{yz} \\ F_{zx} & F_{zy} & F_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix}. \quad \text{第二基本形式}$$

(提示: 注意到  $\Pi = -\langle dn, ds \rangle$ , 但是  $n = \text{grad } f$  和  $ds$  垂直, 故  $\frac{1}{|\text{grad } f|}$  免于求导. 当然, 直接验证则需要对  $F = 0$  求两次导才能得到.)

**问题 3.11** 想要说明定向和法向量的关系, 需要抽象一点的语言. 对于  $n$  维线性空间  $V$ , 下列几件事物是等同的

- $\wedge^n V$  中一个非零元素; 定义了相同的定向如果相差一个正数数乘.
- 有序排列的基; 定义了相同的定向如果过渡矩阵行列式是正的.
- 同构  $\mathbb{R}^n \rightarrow V$ ; 定义了相同的定向如果转移映射行列式是正的.

通过对偶基定向还迁移到对偶空间  $V^\vee$  中. 这本质上是线性代数. 流形  $M$  的定向就定义为在每一点  $x \in M$ , 对切空间  $\text{Tan}_x$  或余切空间  $\text{Cot}_x$  光滑地选取



上面的元素, 分别对应到处处不为零的微分形式, 正向有序切向量, 正向坐标卡.

对于  $\mathbb{R}^n$  中的  $n-1$  维流形  $M$ , 那么法向量场的指定和上述指定是一致的, 每个法向量都决定了一个有序基的排列. 例如  $x \in M$  附近法向量场  $n$ , 定义有序基  $(X_1, \dots, X_{n-1})$  使得  $(X_1, \dots, X_{n-1}, n)$  构成  $\mathbb{R}^n$  的正向基. 验证这一定义的良好定义性.

想要严格定义面积元, 需要更加抽象一点的语言. 如果上面的线性空间  $V$  还带有内积, 那么内积将自动迁移到对偶空间的  $n$  次外代数上, 那么  $\wedge^n V^\vee$  中一个正向的单位向量就是“体积元”. 对应 Riemann 流形  $M$  上体积元就是  $\text{Diff}^n M$  上一个单位微分形式.

试计算, 对于  $\mathbb{R}^3$  中的正则曲面  $r = r(u, v)$ , 这样定义的面积元是一致的, 其中  $\mathbb{R}^3$  的定向选作有序基  $(r_u, r_v, r_u \wedge r_v)$ . (提示: 对于内积空间  $V$ , 选定一组基  $e_1, \dots, e_n \in V$ , 对偶基  $f_1, \dots, f_n \in V^\vee$ , 外代数  $\wedge^n V^\vee$  由  $f_1 \wedge \dots \wedge f_n$  张成. 假如选取正向正交基  $e'_1, \dots, e'_n \in V$ , 那么对偶基  $f'_1, \dots, f'_n \in V^\vee$  就是  $V^\vee$  的正交基,  $f'_1 \wedge \dots \wedge f'_n$  就是体积元, 那么变成计算过渡矩阵. 如果  $e_i = \sum_j a_{ij} e'_j$ , 那么  $f'_j = \sum a_{ij} f_i$ , 故  $f'_1 \wedge \dots \wedge f'_n = \det(a_{ij}) f_1 \wedge \dots \wedge f_n$ . 假设  $\langle e_i, e_j \rangle = g_{ij}$ , 那么如果  $e_1, \dots, e_n$  是正向的, 体积元正是  $\sqrt{\det(g_{ij})} f_1 \wedge \dots \wedge f_n$ .)

**问题 3.12** 证明球极投影  $p : \mathbb{S}^2 \setminus \{(0, 0, 1)\} \rightarrow \mathbb{R}^2$  将圆映成圆. 且, 经过  $(0, 0, 1)$  的圆被映成直线. (提示: 将球面上的圆理解为球和一张平面的交, 这样带入球极投影表达式即可.)

**习题 3.13** 利用  $\mathbb{C} \sqcup \{\infty\}$  上亚纯函数都是有理分式证明:

(1) Riemann 球上的全纯自同构群由 Möbius 变换组成. (提示: 一个有理分式何时是单射? 分子分母如果互质, 那么必定只有一个根, 且不能有重根, 利用 Rouché 定理, 或用 (1.7) 观察局部态性, 更可以小心地代数论证无重根. 何时可逆? 直接计算可知必须为 Möbius 变换.)

(2) 复平面  $\mathbb{C}$  上的全纯自同构群由线性  $z \mapsto \alpha z + \beta$  组成, 其中  $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, \beta \in \mathbb{C}$ . (提示: 通过分类无穷远点的孤立奇点类型, 不能是本性奇点, 因为根据 Casorati-Weierstrass 定理, 孤立奇点附近的像稠密. 尔后计算怎样的 Möbius 变换在复平面上全纯.)

**习题 3.14** 证明任何 Möbius 变换都是平移, 旋转, 位似, 反演的复合. (提示: 这是高中数学.  $\frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} = \frac{\alpha}{\gamma} + \frac{\beta - \frac{\alpha\delta}{\gamma}}{\gamma z + \delta}$ .)

**问题 3.15** 证明 Mobius 变换将圆 (或直线) 映成圆 (或直线). 如果将直线理解过无穷点, 半径为无穷大的圆, 就可以简约成圆映成圆. (提示: 实际上复平面内任何一个圆 (或直线) 都具有方程  $\alpha z\bar{z} + \beta z + \bar{\beta}\bar{z} + \gamma = 0$ , 其中  $\alpha, \gamma \in \mathbb{R}, \beta \in \mathbb{C}$ , 且判别式  $\Delta = |\beta|^2 - \alpha\gamma > 0$ , 这样的圆, 圆心为  $-\frac{\bar{\beta}}{\alpha}$ , 半径为  $\frac{\sqrt{\Delta}}{\alpha}$ .)

**问题 3.16** 如果函数  $f$  在  $\mathbb{D}^2$  内全纯, 在  $\bar{\mathbb{D}}^2$  内连续, 且  $f(S^1) \subseteq S^1$ , 证明:  $f$  一定是 Blaschke 变换的乘积的常数倍. (提示: 首先, 根据幅角原理,  $f$  的零点是有限个, 再利用 Blaschke 变换乘出和  $f$  有相同零点情况的函数, 二者相除是一个没有零点且映  $S^1$  到  $S^1$  的全纯函数, 此时对其和其倒数使用最大模原理得到这是常数. 这是边界和零点的情况能够控制函数这一方法论的一个例证.)

**问题 3.17 (Pascal 定理)** 回顾 Blaschke 变换的几何意义 (3.8). 我们要证明 Pascal 定理.

(1) 任意取单位圆内共线三点  $x, y, z$ , 证明:

$$x\bar{y} + y\bar{z} + z\bar{x} = \bar{x}y + \bar{y}z + \bar{z}x.$$

(提示: 展开表达式  $\frac{x-y}{x-y} = \frac{z-y}{z-y}$ .)

(2) 假如记  $\varphi_\alpha = \frac{\alpha-z}{1-\bar{\alpha}z}$ , 验证对于共线的三点  $x, y, z$ , 有

$$\varphi_x \circ \varphi_y \circ \varphi_z = \varphi_z \circ \varphi_y \circ \varphi_x.$$

(提示: 计算矩阵,

$$A = \begin{pmatrix} -1 & z \\ -\bar{z} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & y \\ -\bar{y} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & x \\ -\bar{x} & 1 \end{pmatrix}.$$

迹是

$$\text{tr } A = -1 + \bar{x}y + \bar{y}z - \bar{x}z + x\bar{z} - y\bar{z} - \bar{y}x + 1 = 0.$$

故考虑特征多项式知  $A^2$  是一个数乘, 于是  $\varphi_z \circ \varphi_y \circ \varphi_x \circ \varphi_z \circ \varphi_y \circ \varphi_x = \text{id}$ .)

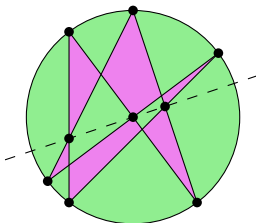


Figure 3.10: Pascal 定理

(3) 在圆上任意取六个点  $A, B, C, A', B', C'$ , 则以下三点共线,

$$AB' \cap A'B \quad BC' \cap B'C \quad CA' \cap C'A.$$

如图 3.10 (提示: 用一些几何的技巧, 变成 (2) 的反用.)

[1] John W. Milnor. *Topology from the Differentiable Viewpoint*.

[2] A. Hatcher. *Algebraic Topology*.

[3] 龚昇. 简明复分析. S. Gong. *Concise complex analysis*.

# Chapter 4

## 二维轮胎面 $\mathbb{T}^2$

轮胎面直接的定义是  $\mathbb{T}^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ . 称之为“轮胎面”是因为其真的可以放入  $\mathbb{R}^3$  中成为一个“轮胎”的样子, 如图4.1. 需要注意的是, 难以从图中表现



Figure 4.1: 轮胎面

的是,  $\mathbb{T}^2$  指的是“空心”的轮胎, 换句话说一个“甜甜圈”的表皮.

我们先花一点时间说明这件事. 方法有三.

- 朴素地理解,  $\mathbb{T}^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$  表示“ $\mathbb{S}^1$  那么多多个  $\mathbb{S}^1$ ”. 假想一个大  $\mathbb{S}^1$  上面套着一个小的  $\mathbb{S}^1$ , 让小的  $\mathbb{S}^1$  “绕着”大的  $\mathbb{S}^1$  旋转一圈形成的“轨迹”就得到了“轮胎”面, 如图4.2.

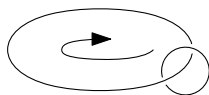


Figure 4.2: 小的  $\mathbb{S}^1$  “绕着” 大的  $\mathbb{S}^1$  旋转一圈

- 将  $S^1$  理解为  $[0, 1]/\{0, 1\}$ , 那么  $T^2 = S^1 \times S^1$  可以看成  $[0, 1] \times [0, 1]$  的商空间. 如图4.3, 将其扭曲粘粘就看到了“轮胎”.

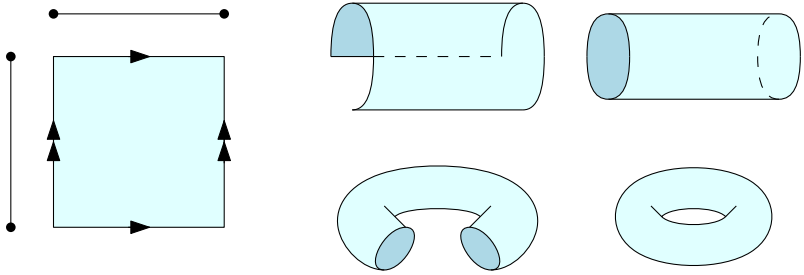
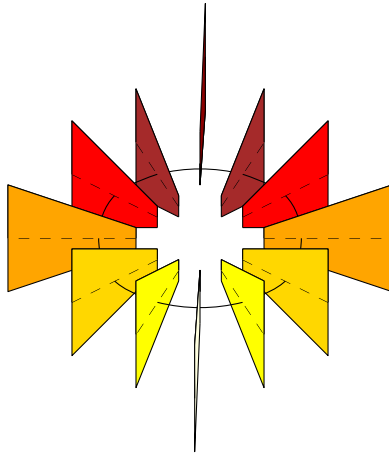


Figure 4.3: 粘出轮胎

- 我们如果把  $S^1 \times \mathbb{R}^2$  看做在圆周上每一点粘一个  $\mathbb{R}^2$ , 画成图4.4的样子. 在图像上画出  $T^2 = S^1 \times S^1 \subseteq S^1 \times \mathbb{R}^2$ , 我们就会发现“轮胎”面.

Figure 4.4:  $S^1 \times \mathbb{R}^2$ 

作为拓扑空间 作为拓扑空间,  $T^2$  有  $\Delta$ -复形结构, 简单复形结构还有 CW-复形结构, 如图4.5.

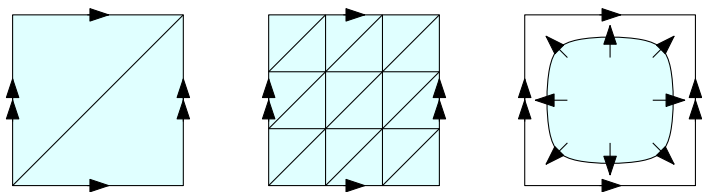


Figure 4.5:  $\mathbb{T}^2$  的结构

显然, 根据  $\mathbb{T}^2$  的定义, 同伦群

$$\pi_n(\mathbb{T}^2) = \pi_n(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1) = \pi_n(\mathbb{S}^1) \times \pi_n(\mathbb{S}^1) = \begin{cases} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, & n = 1, \\ 0, & n \geq 2. \end{cases}$$

因为  $\mathbb{S}^1$  的万有覆叠是  $\mathbb{R}$ , 那么自然  $\mathbb{T}^2$  的万有覆叠就是  $\mathbb{R}^2$ . 这提供了另一种定义  $\mathbb{T}^2$  的方案, 即  $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ , 如图4.6.

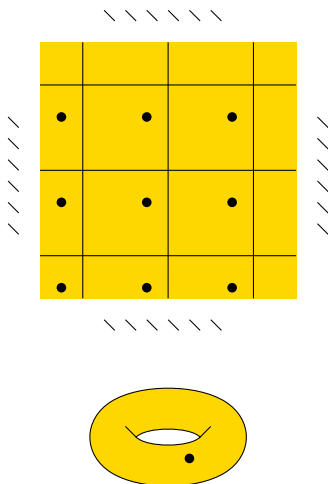
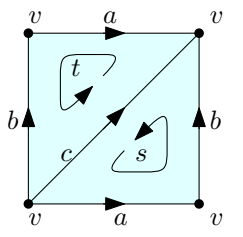


Figure 4.6:  $\mathbb{T}^2$  的万有覆叠

下面我们用  $\Delta$ -复形结构计算同调群, 按照下图标好点线面, 并得到复形

$C_\bullet(\mathbb{T}^2)$  如下.



$$\begin{array}{rcl}
 C_2(\mathbb{T}^2) & \longrightarrow & C_1(\mathbb{T}^2) & \longrightarrow & C_0(\mathbb{T}^2) \\
 s & \longmapsto & a + b - c & & \\
 t & \longmapsto & -a - b + c & & \\
 & & a, b, c & \longmapsto & 0
 \end{array}$$

那么直接计算同调群可得

- $H_0(\mathbb{T}^2) = v \cdot \mathbb{Z}$ .
- $H_1(\mathbb{T}^2) = a \cdot \mathbb{Z} \oplus b \cdot \mathbb{Z} \oplus c \cdot \mathbb{Z} / (a + b - c) \cdot \mathbb{Z} = [a] \cdot \mathbb{Z} \oplus [b] \cdot \mathbb{Z}$ .
- $H_2(\mathbb{T}^2) = s \cdot \mathbb{Z} \oplus t \cdot \mathbb{Z} / (s + t) \cdot \mathbb{Z} = [s + t] \cdot \mathbb{Z}$ .
- $n \geq 3 \Rightarrow H_3(\mathbb{T}^2) = 0$ .

假如记  $v^*(a^*, b^*$  或  $s^*, t^*)$  为  $v(a, b$  或  $s, t)$  的对偶基, 还可以得到上链复形  $C^\bullet(\mathbb{T}^2) = \text{Hom}(C_\bullet(\mathbb{T}^2), \mathbb{Z})$  如下.

$$\begin{array}{rcl}
 C^0(\mathbb{T}^2) & \longrightarrow & C^1(\mathbb{T}^2) & \longrightarrow & C^2(\mathbb{T}^2) \\
 v^* & \longmapsto & 0 & & \\
 & & a^*, b^* & \longmapsto & s^* - t^* \\
 & & c^* & \longmapsto & t^* - s^*
 \end{array}$$

还可以计算上同调群

- $H^0(\mathbb{T}^2) = v^* \cdot \mathbb{Z}$ .
- $H^1(\mathbb{T}^2) = (a^* + c^*) \cdot \mathbb{Z} \oplus (b^* + c^*) \cdot \mathbb{Z}$ .
- $H^2(\mathbb{T}^2) = s^* \cdot \mathbb{Z} \oplus t^* \cdot \mathbb{Z} / (s^* - t^*) \cdot \mathbb{Z} = [s] \cdot \mathbb{Z}$ .
- $n \geq 3 \Rightarrow H^3(\mathbb{T}^2) = 0$ .

下面, 方便起见, 我们暂时略去同构类外的方括号, 来计算纷繁复杂的乘积.

- 蒂积 (cup product)

$\downarrow \cup \rightarrow$	$v^*$	$a^* + c^*$	$b^* + c^*$	$s^*$
$v^*$	$v^*$	$a^* + c^*$	$b^* + c^*$	$s^*$
$a^* + c^*$	$a^* + c^*$	0	$s^*$	0
$b^* + c^*$	$b^* + c^*$	$-s^*$	0	0
$s^*$	$s^*$	0	0	0

以上结果需要先选定某种顺序 (不只是方向), 按照定义小心计算, 例如, 假设选定  $s : 0 \xrightarrow{b} 1 \xrightarrow{c} 2 \xrightarrow{a} 0$ ,  $t : 0 \xrightarrow{a} 1 \xrightarrow{b} 2 \xrightarrow{c} 0$  那么

$$(a^* + c^*) \cup (b^* + c^*) = \begin{bmatrix} s \mapsto (a^* + c^*)(b) \cdot (b^* + c^*)(-c) = 0 \\ t \mapsto (a^* + c^*)(-a) \cdot (b^* + c^*)(-b) = 1 \end{bmatrix} = t^* = -s^*$$

- 交积 (cap product)

$\downarrow \cap \rightarrow$	$v$	$a$	$b$	$s + t$
$v^*$	$v$	$a$	$b$	$s + t$
$a^* + c^*$		$v$	0	$-b$
$b^* + c^*$		0	$v$	$a$
$s^*$				$v$

这时照搬奇异复形的计算公式会失效, 因为那样定义交积不能验证 Leibniz 律. 这时应该利用共轭性计算, 例如

$$\begin{cases} \langle a^* + c^*, (a^* + c^*) \cap (s + t) \rangle = \langle (a^* + c^*) \cup (a^* + c^*), s + t \rangle = 0 \\ \langle b^* + c^*, (a^* + c^*) \cap (s + t) \rangle = \langle (b^* + c^*) \cup (a^* + c^*), s + t \rangle = -1 \end{cases}$$

故  $(a^* + c^*) \cap (s + t) = -b$ .

- 相交积 (intersection product)

$\downarrow \cup \rightarrow$	$v$	$a$	$b$	$s + t$
$v$	0	0	0	$v$
$a$	0	0	$v$	$a$
$b$	0	$-v$	0	$b$
$s + t$	$v$	$a$	$b$	$s + t$



相交积的定义就是来自 **Poincaré 对偶** [ $* \mapsto * \cap (s + t)$ ].

不论如何, 我们计算出

$$H_n(\mathbb{T}^2) = \begin{cases} \mathbb{Z} & n = 0 \\ \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & n = 1 \\ \mathbb{Z} & n = 2 \\ 0 & n \geq 3 \end{cases} \quad H^n(\mathbb{T}^2) = \begin{cases} \mathbb{Z} & n = 0 \\ \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & n = 1 \\ \mathbb{Z} & n = 2 \\ 0 & n \geq 3 \end{cases}$$

于是亏格  $g = \frac{1}{2} \text{rank } H^1(\mathbb{T}^2) = 1$ . 不论从同伦还是从同调的角度, 直观地说, 我们都能观测到两个“洞”, 一个洞在“轮胎内部”, 另一个洞在“轮胎中间的孔里”, 不过很多时候我们认为这只有一个“洞”. 如图4.7.

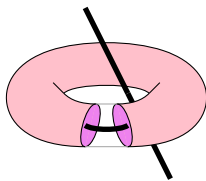


Figure 4.7: 轮胎面上的两个洞

**作为微分流形** 轮胎面  $\mathbb{T}^2$  是最简单的积流形的例子. 因为  $S^1$  还是 Lie 群, 因此  $\mathbb{T}^2$  也是 Lie 群.

为了方便说明, 先澄清一下语言. 我们视  $S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ , 那么  $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ . 注意到自然映射是覆叠映射, 因此,  $\mathbb{R}^2$  的坐标卡在局部上都可以直接用在  $\mathbb{T}^2$  上, 不过坐标卡可能相差一个  $\mathbb{Z}^2$  中元素.

具体来说, 令  $\pi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 = \mathbb{T}^2$  是自然映射. 任给一点  $p_0 \in \mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}$ , 假设  $p_0 = (x_0, y_0) \bmod \mathbb{Z}^2$ , 那么  $p_0$  附近邻域  $V$  到  $(x_0, y_0)$  附近邻域  $U$  有一个同胚  $\varphi$  恰构成  $\pi|_U$  的逆, 可以将  $\varphi$  取作坐标卡. 虽然这样取出的  $\varphi$  和

$(x_0, y_0)$  的选取有关, 但是不论如何选取也只相差一个  $\mathbb{Z}^2$  中的元素. 如图4.8.

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{\pi} & \mathbb{T}^2 \longrightarrow 0 \\
 & & & & \uparrow \subseteq & & \uparrow \subseteq \\
 & & & & U & \xrightarrow{\pi|_U} & V \\
 & & & & \leftarrow \varphi & & 
 \end{array}$$

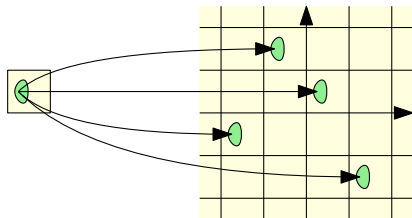


Figure 4.8: 轮胎面的坐标卡

轮胎面上有一类非常值得关注的子流形, 考虑

$$\tau : \mathbb{R}^1 \longrightarrow \mathbb{T}^2 \quad \theta \longmapsto (\theta, \gamma\theta) \bmod \mathbb{Z}^2$$

其中  $\gamma$  是一个无理数, 不难发现  $\tau$  是单射, 在每一点都是浸入, 如图4.9.

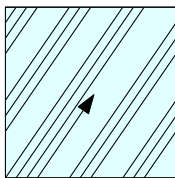


Figure 4.9: 轮胎纹

但是  $\tau$  不是嵌入, 实际上  $\tau$  的像是稠密的.

**命题 4.1 (Dirichlet)** 上文所定义的  $\tau$  的像是稠密的.

**证明** 熟知数论的结果, 当  $x$  是无理数时,  $\mathbb{Z} + x\mathbb{Z}$  稠密. 令  $e : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$  是自然映射. 固定  $\bar{x} = e(x) \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ , 考虑那么,  $\tau$  的像截面

$$\{\bar{y} \in \mathbb{R}/\mathbb{Z} : (\bar{x}, \bar{y}) \in \tau(\mathbb{R})\} = e(\gamma(x + \mathbb{Z}) + \mathbb{Z})$$

也是稠密的. 从而  $\tau$  的像都是稠密的. □

实际上 **Kronecker 定理** 进一步断言,  $\tau(\mathbb{Z})$  也是稠密的.

关于子流形  $\tau$ , 有以下两种理解. 假设  $x, y$  就是  $\mathbb{R}^2$  上的坐标卡, 这自动搬到  $\mathbb{T}^2$  上.

- 这是场  $\frac{\partial}{\partial x} + \gamma \frac{\partial}{\partial y}$  的积分曲线.

画在  $[0, 1] \times [0, 1]$  上看, 这个场在每一点指定一个斜率为  $\gamma$  的切向量.

- 这给出一个 Lie 子群, 但不是闭 Lie 子群.

这个 Lie 子群的“无穷小生成元”是  $\left. \frac{\partial}{\partial x} \right|_1 + \gamma \left. \frac{\partial}{\partial y} \right|_1$ .

同时也是 Lie 子代数  $\text{span} \left( \left. \frac{\partial}{\partial x} \right|_1 + \gamma \left. \frac{\partial}{\partial y} \right|_1 \right)$  在指数映射下的像.

倘若用离散世界的群论作类比, 总共有如下有四种意义的生成.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{给出群同态 } \varphi: \mathbb{Z} \rightarrow G \\ \left\{ \begin{array}{l} \text{称 } \varphi \text{ 的像是 } \varphi(1) \text{ 生成的子群.} \\ \text{称 } \varphi \text{ 的像的闭包是 } \varphi(1) \text{ 拓扑生成的闭子群.} \end{array} \right. \\ \text{给出光滑群同态 } \varphi: \mathbb{R} \rightarrow G. \\ \left\{ \begin{array}{l} \text{称 } \varphi \text{ 的像是 } d\varphi \left( \left. \frac{d}{dx} \right|_{x=0} \right) \text{ 生成的 Lie 子群.} \\ \text{称 } \varphi \text{ 的像的闭包是 } d\varphi \left( \left. \frac{d}{dx} \right|_{x=0} \right) \text{ 拓扑生成的闭 Lie 子群.} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

这样, 之前的结果可以总结成

- $(1, \gamma) \bmod \mathbb{Z}^2 \in \mathbb{T}^2$  拓扑生成了  $\mathbb{T}^2$ . Kronecker 定理
- $\left. \frac{\partial}{\partial x} \right|_1 + \gamma \left. \frac{\partial}{\partial y} \right|_1 \in \text{Tan}_1$  生成了  $\tau$ . 定义
- $\left. \frac{\partial}{\partial x} \right|_1 + \gamma \left. \frac{\partial}{\partial y} \right|_1 \in \text{Tan}_1$  拓扑生成了  $\mathbb{T}^2$ . Dirichlet 定理 (4.1)

最后我们来谈论一下如果将  $\mathbb{T}^2$  放置在  $\mathbb{R}^3$  中会有怎样有趣的结果, 注意到, 如果如图4.10竖直放置, 那么极值点将有四个, 其中两个是极值点, 两个

是鞍点. 似乎除了两个极值点是预先“给好的”, 每增加一个洞就多出两个鞍点, 这一数洞的方案适用于更多洞的“轮胎面”, 如图4.11, 我们也会在??讨论这个问题. 这表明

$$\text{鞍点的个数} - \text{极值点的个数} = 2(\text{轮胎洞的数目} - 1).$$

且可以证明, 左侧表达式“摆放在  $\mathbb{R}^3$  的姿势”无关.

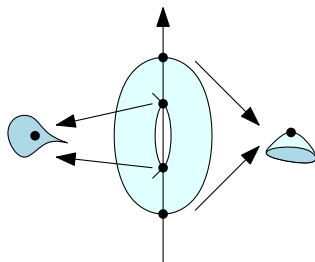


Figure 4.10: 鞍点和极值点

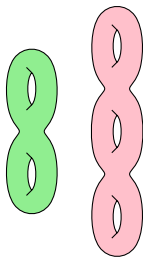


Figure 4.11: 更多洞的轮胎面

**作为复流形** 在复平面上任意选择  $\alpha, \beta \neq 0$ , 如果  $\alpha, \beta$  不共线, 那么考虑他们生成的格  $\Lambda = \alpha\mathbb{Z} + \beta\mathbb{Z}$ , 这样  $\mathbb{C}/\Lambda$  就成为一个轮胎面  $\mathbb{T}^2$ . 同样, 因为自然映射  $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}/\Lambda$  是覆叠映射, 这直接赋予了  $\mathbb{T}^2$  复结构.

注意到, 通过数乘, 有作为 Riemann 曲面的同构

$$\begin{cases} \mathbb{C}/(\alpha\mathbb{Z} + \beta\mathbb{Z}) \xrightarrow{1/\alpha} \mathbb{C}/((\beta/\alpha)\mathbb{Z} + \mathbb{Z}) \\ \mathbb{C}/(\alpha\mathbb{Z} + \beta\mathbb{Z}) \xrightarrow{1/\beta} \mathbb{C}/((\alpha/\beta)\mathbb{Z} + \mathbb{Z}) \end{cases}$$

这样任何一个  $\mathbb{C}/(\alpha\mathbb{Z} + \beta\mathbb{Z})$  都全纯同构于  $\mathbb{C}/(\tau\mathbb{Z} + \mathbb{Z})$ , 且  $\tau$  的虚部大于 0.

**定理 4.2** 两个轮胎面  $\mathbb{T}_\tau^2 = \mathbb{C}/(\tau\mathbb{Z} + \mathbb{Z})$ ,  $\mathbb{T}_\sigma^2 = \mathbb{C}/(\sigma\mathbb{Z} + \mathbb{Z})$ , 其中  $\tau, \sigma$  虚部都大于零. 作为 Riemann 曲面同构当且仅当存在  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$  使得

$$\sigma = \frac{a\tau + b}{c\tau + d}$$

**证明** 考虑下图, 先复合, 再利用覆叠映射的提升得到全纯的同构  $\tilde{f}: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ,

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \xrightarrow{\tilde{f}} & \mathbb{C} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{T}_\tau^2 & \xrightarrow{f} & \mathbb{T}_\sigma^2 \end{array}$$

这样的映射只有线性的一种, 参见习题4.8. 通过预先平移, 可以假设  $f(0) = 0$ . 假设  $f(z) = \alpha z$ , 其中  $\alpha \neq 0$ , 那么根据条件,  $f$  满足

$$\alpha(\tau\mathbb{Z} + \mathbb{Z}) = \alpha\tau\mathbb{Z} + \alpha\mathbb{Z} = \sigma\mathbb{Z} + \mathbb{Z}.$$

说明二者都是这一格的基, 于是存在  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \pm\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$  使得

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha\tau \\ \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma \\ 1 \end{pmatrix}.$$

因为  $\tau, \sigma$  虚部大于 0 的假设, 故  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ , 稍加整理就得到命题中的关系. 反之, 取  $f: z \mapsto \alpha z$ , 其中  $\alpha = \frac{1}{c\tau + d}$ , 即所谓自守因子之倒数.  $\square$

例如,  $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ & 1 \end{pmatrix}$  代表平移, 对应的轮胎面是一样的, 如图4.12.

**定理 4.3** 任何一个  $\mathbb{T}^2$  上的全纯函数都是常数.

作为推论, 两个亚纯函数如果具有相同的零点和极点情况, 那么二者相差一个非零复数.

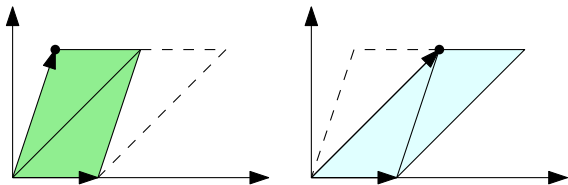


Figure 4.12: 平移

**证明** 取一个全纯函数  $f: \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{C} \subseteq \mathbb{S}^2$ . 如果  $f$  不是常数, 那么  $f$  是开映射, 从而  $f(\mathbb{T}^2)$  是开的. 但是,  $f(\mathbb{T}^2)$  紧致. 在  $\mathbb{S}^2$  中这样的集合只有全集, 这说明  $f$  有极点.  $\square$

**定理 4.4** 任何一个  $\mathbb{T}^2$  上的亚纯函数, 在计重数的意义下, 零点数目等于极点数目.

**证明** 将  $\mathbb{T}^2$  亚纯函数通过  $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{T}^2$  看成  $\mathbb{C}$  上的“双周期”亚纯函数. 所谓双周期指的是  $f(z+1) = f(z) = f(z+\tau)$  的函数  $f$ . 我们可以在基本区域

$$\Gamma = \{x + y\tau : x, y \in [0, 1] \times [0, 1]\} \subseteq \mathbb{C}$$

的边界上使用幅角原理来证明结论. 不难发现, 因为周期性, 上下左右两两抵消, 故

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Gamma} \frac{f'}{f} dz = 0.$$

因此零点数目等于极点数目. 当然, 能够使用的前提是  $\partial\Gamma$  上没有零点或极点, 如果有必要的话, 稍稍扰动  $\Gamma$  即可 — 用  $w + \Gamma$  代替  $\Gamma$ .  $\square$

以上结果基本上说明,  $\mathbb{T}^2$  上的亚纯函数在相差一个常数的意义下, 被零点和极点的情况决定. 因此如果要制造出所有的亚纯函数, 我们需要构造那些在特定的点取零点或极点的亚纯函数. 当然, 为了满足零点和极点数目相等的要求, 我们用  $0$  处作为“缓冲点”. 为了方便讨论, 下面固定  $\Lambda = \alpha\mathbb{Z} + \beta\mathbb{Z}$ , 其中  $\alpha, \beta$  是不共线的非零复数, 取  $\mathbb{T}^2 = \mathbb{C}/\Lambda$ .

著名的 **Weierstrass 函数** 正是这样一个函数,

$$\wp(z) = \wp_\Lambda(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\omega \in \Lambda \setminus \{0\}} \left( \frac{1}{(z + \omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right).$$

实际上这就是“周期化”的  $\frac{1}{z^2}$ . 不难验证, Weierstrass 函数  $\wp$  满足  $\wp(z + \Lambda) = \wp(z)$ , 从而可以视作  $\mathbb{C}/\Lambda$  的亚纯函数. 其导数

$$\wp'(z) = \wp'_\Lambda(z) = -2 \sum_{\omega \in \Lambda} \frac{1}{(z - \omega)^3}$$

也可以视作  $\mathbb{C}/\Lambda$  的亚纯函数. Weierstrass 函数有如下直接从表达式可看出的性质

- $\wp_\Lambda(z)$  是偶函数,  $\wp'_\Lambda(z)$  是奇函数.
- $\wp_\Lambda(z)$  唯一的极点是  $0 + \Lambda$  且重数是 2.
- $\wp'_\Lambda(z)$  唯一的极点是  $0 + \Lambda$  且重数是 3.
- $\wp'_\Lambda(z)$  唯一的零点是  $\frac{\alpha}{2} + \Lambda, \frac{\beta}{2} + \Lambda, \frac{\alpha+\beta}{2} + \Lambda$ , 重数都是 1.

用更直接的语言写就是

$$\begin{aligned} \wp^{-1}(\infty) &= 2 \times (0 + \Lambda), \\ (\wp')^{-1}(\infty) &= 3 \times (0 + \Lambda), \\ (\wp')^{-1}(0) &= \left(\frac{\alpha}{2} + \Lambda\right) + \left(\frac{\beta}{2} + \Lambda\right) + \left(\frac{\alpha+\beta}{2} + \Lambda\right). \end{aligned}$$

于是,  $(\wp')^2$  和  $(\wp - \wp(\frac{\alpha}{2}))(\wp - \wp(\frac{\beta}{2}))(\wp - \wp(\frac{\alpha+\beta}{2}))$  有相同的零点和极点情况, 通过对比系数知道, 关系是

$$(\wp')^2 = 4(\wp - e_1)(\wp - e_2)(\wp - e_3). \quad (\dagger)$$

其中  $e_1 = \wp(\frac{\alpha}{2}), e_2 = \wp(\frac{\beta}{2}), e_3 = \wp(\frac{\alpha+\beta}{2})$ . 实际上, 凭借  $\wp$ , 我们就能够计算出  $\mathbb{C}/\Lambda$  上的有理函数域. 具体来说, 步骤如下

- 对于任何一个  $\mathbb{C}/\Lambda$  上偶亚纯函数, 即  $f(z) = f(-z)$ . 因为 0 我们当做缓冲点, 假设  $f$  的非零零点是  $a_1, -a_1, \dots, a_n, -a_n$ , 非零极点是  $b_1, -b_1, \dots, b_m, -b_m$ . 那么

$$\frac{(\wp(z) - \wp(a_1)) \dots (\wp(z) - \wp(a_n))}{(\wp(z) - \wp(b_1)) \dots (\wp(z) - \wp(b_m))}$$

和  $f$  有相同的零点极点情况.

- 对于任何一个  $\mathbb{C}/\Lambda$  上奇亚纯函数, 即  $f(z) = -f(-z)$ . 那么  $f\wp'$  就是偶函数.
- 任何一个  $\mathbb{C}/\Lambda$  上的亚纯函数都是奇函数和偶函数的和.

我们得到  $\mathbb{C}/\Lambda$  上的有理函数域是  $\wp$  和  $\wp'$  的有理分式, 即  $\mathbb{C}(\wp, \wp')$ . 实际上,  $\wp$  和  $\wp'$  不再有 (†) 以外的其他代数关系, 因此实际上同构于  $\mathbb{C}[x, y]/(y^2 - 4(x - e_1)(x - e_2)(x - e_3))$  的分式域. 这是椭圆曲线  $y^2 = 4(x - e_1)(x - e_2)(x - e_3)$  的有理函数域, 如图4.13.

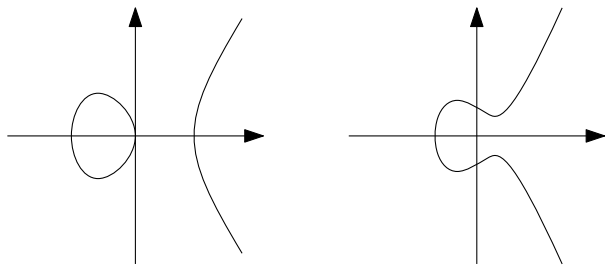


Figure 4.13: 椭圆曲线

实际上, 映射  $\mathbb{C}/\Lambda \xrightarrow{\wp, \wp'} \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$  给出了齐次椭圆曲线  $y^2z = 4(x - e_1z)(x - e_2z)(x - e_3z)$  的“参数化”. 具体来说,

- 首先, 映射应该被更准确地写成

$$\varphi : \mathbb{C}/\Lambda \longrightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \quad (z, w) \longmapsto \begin{cases} [\wp(z), \wp'(z), 1], & z \neq 0, \\ [0, 1, 0], & z = 0. \end{cases}$$

来回避  $\wp, \wp'$  任何一个为  $\infty$  的情况.

- 这一映射是双射.

无穷远点单独考虑即可. 特殊的点是  $e_1, e_2, e_3$ , 他们恰好取  $\wp'(z)$  的零点. 对其他的点  $x$ ,  $\wp(z) = x$  都有两个不同的, 互为相反数的解 — 因为  $\wp(z) - x$  有两个极点. 而这两个解带入  $\wp'$  是非零的相反数.



令人惊奇的是, 轮胎面居然和椭圆曲线通过 Weierstrass 函数全纯等价! 下面, 我们来看一看轮胎面上的加法结构如何搬到椭圆曲线上的.

对于  $\mathbb{C}/\Lambda$  上的亚纯函数  $f$ , 先视作  $\mathbb{C}$  上的亚纯“周期”函数, 考虑基本区  $\Gamma$  边界上的积分

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Gamma} z \frac{f'}{f} dz.$$

上述积分值为  $\sum_{x \in \Gamma} \nu_x(f)x$ , 其中  $\nu_x(f)$  是  $f$  在  $x$  这一点的消没次数. 另一方面同样因为周期性相互抵消, 从而

$$\sum_{x \in \mathbb{C}/\Lambda} \nu_x(f)x = 0 \pmod{\Lambda} \quad (\ddagger).$$

我们要利用这点来计算椭圆曲线加法结构.

在椭圆曲线上选取共直线的三点  $P, Q, R$ , 对应到  $z, w, s \in \mathbb{C}/\Lambda$ , 假设直线方程是  $\ell: ax + by + cz = 0$ , 考虑

$$f(z) = a\wp(z) + b\wp'(z) + c$$

在  $a \neq 0$  时,  $f$  的三个零点是  $z, w, s$ , 根据  $(\ddagger)$ ,  $z + w + s = 0 + \Lambda$ , 其他情况也是类似的. 通过奇偶性调转一下符号, 我们可知, 如果将  $\mathbb{C}/\Lambda$  上的加法拷贝到椭圆曲线上,

$$P + Q = (R \text{ 关于 } x \text{ 轴的对称点})$$

其中  $P, Q, R$  是椭圆曲线上共直线的三点. 当然, 上述运算可以直接用解析几何的方法计算出来, 直接暴力验证结合律的计算将会繁琐而又复杂, 但是提示我们——任何域上的椭圆曲线都有群结构. 这当然会被更多地被数论学家考虑. 当然利用 Cayley-Bacharach 定理可在解析几何的范畴内解决, 参见后章的习题 5.11.

**习题 4.5** 考虑图 4.14 中的轮胎面粘法, 为什么和 4.3 粘出的轮胎面“面反”了? 他们还同胚吗?

**习题 4.6** 假如  $\tau$  是有理数, 试刻画

- $(1, \gamma) \bmod \mathbb{Z}^2 \in \mathbb{T}^2$  生成的子群.

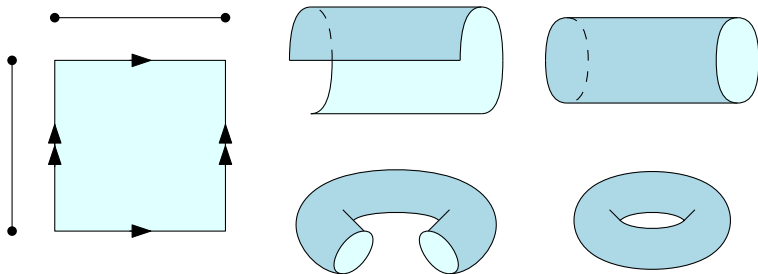


Figure 4.14: 粘出轮胎

- $(1, \gamma) \bmod \mathbb{Z}^2 \in \mathbb{T}^2$  拓扑生成的闭子群.
- $\left. \frac{\partial}{\partial x} \right|_1 + \gamma \left. \frac{\partial}{\partial y} \right|_1 \in \text{Tan}_1$  生成的 Lie 子群.
- $\left. \frac{\partial}{\partial x} \right|_1 + \gamma \left. \frac{\partial}{\partial y} \right|_1 \in \text{Tan}_1$  拓扑生成的闭 Lie 子群.

习题 4.7 如果有三个洞的轮胎面其中之一突然裂开, 如图 4.15, 那么极值点数目如何变化? (提示: 在“裂开”的地方多出两个极值点.)



Figure 4.15: 爆胎了

问题 4.8 证明  $\mathbb{C}$  的全纯自同构都是线性映射. (提示: 考虑无穷远点的作为孤立奇点的情况, 可去则用 Liouville 定理, 本性则附近取到几乎所有值, 矛盾.)

习题 4.9 用 Liouville 定理论证 (4.3). (提示: 通过  $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{T}^2$  看成  $\mathbb{C}$  上的“双周期”亚纯函数, 这样有界, 完成证明.)

问题 4.10 一个问题是, 是否每一条椭圆曲线

$$y^2 = 4x^3 - px + q \quad p^3 - 27q^2 \neq 0$$

都对应着一个  $\Lambda$  使得其和  $\mathbb{C}/\Lambda$  全纯同构? 只要判别是非零, 这一定是可以做到的. 请查阅资料找到一个证明. (提示: 例如下面 [3] 的第 35 页的命题 1.4.3.)

问题 4.11 (Serge 嵌入) 假如将  $\mathbb{S}^1$  同时视作  $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1$ , 那么可以考虑如下的 Serge 嵌入

$$\psi: \mathbb{T}^2 = \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1 \times \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1 \longrightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^3 \quad ([a, b], [c, d]) \longmapsto [ac, ad, bc, bd]$$

证明  $\psi$  是  $\mathbb{T}^2$  到马鞍面  $\{[x, y, z, w] : xw = yz\}$  的双射. (提示: 单射和满射只需要作一作比值. 这时两个圆环正对应着两套直纹.)

[1] Glen E. Bredon. *Topology and Geometry*.

[2] 姜伯驹. 同调论.

[3] Fred Diamond & Jerry Shurman. *A First Course in Modular Forms*.

[4] Theodor Bröcker & Tammo tom Dieck. *Representations of Compact Lie Groups*.

# Chapter 5

## 射影平面 $\mathbb{P}^2$

下面, 需要隆重介绍射影空间  $\mathbb{P}^n$ . 作为定义,

$$\mathbb{P}^n = (\mathbb{R}^{n+1} \text{ 空间的所有 } 1 \text{ 维子空间}).$$

但是这上面并没有显然的拓扑结构. 考虑映射

$$\text{span} : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{P}^n \quad x \longmapsto \mathbb{R} \cdot x.$$

这是一个满射, 赋予  $\mathbb{P}^n$  使上述  $\text{span}$  连续的最弱拓扑, 换言之, 商拓扑. 更直接地, 我们不妨直接认为

$$\mathbb{P}^n = (\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}) / \text{共线}, \quad \text{其中 } x \text{ 共线 } y \iff \exists \lambda \in \mathbb{R}, \text{ 使得 } y = \lambda x.$$

这样定义的有利之处在于我们可以定义**射影坐标**—我们记  $[(x^0, \dots, x^n)]$  为  $(x^0, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^{n+1}$  的像.

考虑如下映射

$$\iota : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{P}^n \quad (x_0, \dots, x_{n-1}) \longmapsto [(x_0, \dots, x_{n-1}, 1)],$$

$$j : \mathbb{P}^{n-1} \longrightarrow \mathbb{P}^n \quad [(x_0, \dots, x_{n-1})] \longmapsto [(x_0, \dots, x_{n-1}, 0)].$$

不难验证

- $\iota$  是  $\mathbb{R}^n$  到开集  $\{(x_0, \dots, x_n) : x_n \neq 0\}$  的同胚; 逆映射是

$$\begin{aligned} \psi: \{(x_0, \dots, x_n) : x_n \neq 0\} &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ [(x_0, \dots, x_n)] &\longmapsto \left( \frac{x_0}{x_n}, \dots, \frac{x_{n-1}}{x_n} \right) \end{aligned} \quad (\clubsuit)$$

- $j$  是  $\mathbb{P}^{n-1}$  到闭集  $\{(x_0, \dots, x_n) : x_n = 0\}$  的同胚;
- $\iota$  的像和  $j$  的像无交, 且并是整个  $\mathbb{P}^n$ .

通常意义下我们会通过  $\iota$  直接认为  $\mathbb{R}^n \subseteq \mathbb{P}^n$ , 而将  $j$  的像认为是“无穷远”, 因为如果将  $j$  的像暴力带入上述  $(\clubsuit)$  中, 会出现零在分母的奇特情况,

$$[(x_0, \dots, x_{n-1}, 0)] \longmapsto \left( \frac{x_0}{0}, \dots, \frac{x_{n-1}}{0} \right) = \infty \cdot (x_0, \dots, x_{n-1})$$

这符合我们对无穷的某种直觉——同时乘以一个非零的有限数, 无穷还是无穷. 换句话说,

$$\mathbb{P}^n = \mathbb{R}^n \sqcup (\text{各个方向的无穷})$$

简单的例子是  $\mathbb{P}^1$  可被认为是  $\mathbb{R}^1 \sqcup \{\infty\}$ , 其中  $x \in \mathbb{R}^1$  对应到  $[(x, 1)]$ , 而  $\infty$  对应到  $[(1, 0)]$ . 所以  $\mathbb{P}^1$  同胚于  $S^1$ , 如图5.1.

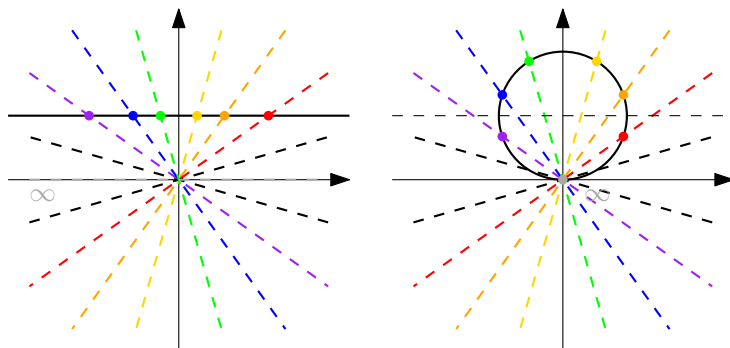


Figure 5.1:  $\mathbb{P}^1$  同胚于  $S^1$

继续看  $\mathbb{P}^2$ , 按照上面的看法,  $\mathbb{P}^2 = \mathbb{R}^2 \sqcup \mathbb{P}^1$ . 如果再等同  $\mathbb{P}^1 = \mathbb{R}^1 \sqcup \{\infty\}$ ,

那么

$$\mathbb{P}^2 = \mathbb{R}^2 \sqcup \mathbb{R}^1 \sqcup \{\infty\} \quad \begin{cases} (x, y) \in \mathbb{R}^2 & \leftrightarrow [(x, y, 1)] \\ x \in \mathbb{R}^1 & \leftrightarrow [(x, 1, 0)] \\ \infty & \leftrightarrow [(1, 0, 0)] \end{cases}$$

如图5.2.

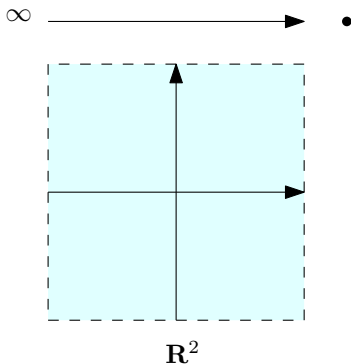


Figure 5.2:  $\mathbb{P}^2$  示意图

**射影几何** 下面我们要探讨一些经典的射影几何. 这也是射影平面引入的一个来源. 射影空间的直线  $l$  都形如

$$l = \{[(x, y, z)] \in \mathbb{P}^2 : ax + by + cz = 0\} \quad a, b, c \text{ 不全为零}$$

这显然是一个闭集, 并称  $ax + by + cz = 0$  是直线的方程. 于是  $\mathbb{P}^2$  中的直线  $l : ax + by + cz = 0$  有下述分类.

- 直线  $l \cap \mathbb{R}^2 \neq \emptyset$ , 那么  $a, b$  不全为 0.

将其放置在  $\mathbb{R}^2$  上看, 根据 (), 就是通常的直线  $ax + by + c = 0$ . 且  $l \cap \mathbb{R}^2$  的闭包就是  $l$ , 因为  $l \cap \mathbb{R}^2$  只比  $l$  少了一个无穷远处的点.

- 直线  $l \cap \mathbb{R}^2 = \emptyset$ , 那么  $a = b = 0$ , 且  $c \neq 0$ .

于是  $l$  就是无穷远  $z = 0$ .

熟知, 平面  $\mathbb{R}^2$  内任意“两条不同的不平行直线都相交”. 但是在  $\mathbb{P}^2$  中, 变成“任意两条不同的直线都相交”, 因为两条平行的直线的方程连立会得到一个无穷远处的交点

$$\begin{cases} ax + by + c_1z = 0, \\ ax + by + c_2z = 0. \end{cases} \Rightarrow [(x, y, z)] = [(-b, a, 0)].$$

或者说,

$$\begin{cases} ax + by + c_1 = 0, \\ ax + by + c_2 = 0. \end{cases} \Rightarrow (x, y) = \infty \cdot (-b, a).$$

一个经典的原理是射影平面中直线与点的对偶. 考虑

$$\text{对偶: } \mathbb{P}^2 \longrightarrow \mathbb{P}^2 \text{ 中的直线} \quad [(a, b, c)] \longmapsto \text{直线}\{ax + by + cz = 0\}$$

这当然是双射. 放回  $\mathbb{R}^3$  子空间的语言,  $\mathbb{P}^2$  中的点与  $\mathbb{R}^3$  一维子空间一一对应, 直线与  $\mathbb{R}^3$  中的二维子空间一一对应, 上述表达式说明

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}^2 & \xrightarrow{\text{对偶}} & \mathbb{P}^2 \text{ 中的直线} \\ \parallel & & \downarrow \text{锥形} = \text{原像} \cup \{0\} \\ \mathbb{R}^3 \text{ 一维子空间} & \xrightarrow{\text{取正交补}} & \mathbb{R}^3 \text{ 二维子空间} \end{array}$$

同时不难验证, 如果有点和直线的对偶  $A \leftrightarrow a, B \leftrightarrow b, C \leftrightarrow c$ ,

$$a \text{ 是过 } B \text{ 和 } C \text{ 的直线} \iff b \text{ 和 } c \text{ 交于 } A$$

这当然来自于直接的计算, 不过可以利用线性代数熟知的常识, 对于有限维欧式空间的子空间有

$$(V \cap U)^\perp = V^\perp + U^\perp$$

例如如下经典的平面几何结论.

**定理 5.1 (Desargues 定理)** 考虑两个三角形  $\triangle ABC, \triangle A'B'C'$ , 那么下列命题是等价的

(1) 如下直线交于同一点

$$AA', \quad BB', \quad CC'.$$

(2) 如下点在同一直线上

$$AB \cap A'B', \quad BC \cap B'C', \quad AC \cap A'C'.$$

即对应点的连线共点等价于对应边的交点共线. 如图 5.3

**证明** 由 (1) 推 (2) 的过程如下, 将  $B$  点稍稍抬高离开纸面, 这样顺带  $B'$  被连带抬起, 这时我们会发现这三点当然在两个三角形所在平面的交线上. 将其放回平面内, 不难想见他们还依旧共线. 反之 (2) 推 (1) 正是对偶的运用.  $\square$

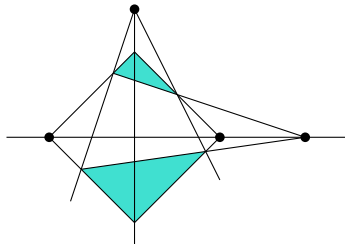


Figure 5.3: Desargues 定理

更一般地, 任何三元的齐次多项式  $f(x, y, z)$ ,

$$\mathbb{P}\Gamma_f = \{[(x, y, z)] \in \mathbb{P}^2 : f(x, y, z) = 0\}.$$

被称为  $f$  在  $\mathbb{P}^2$  中的 **零点** 或 **图像**, 类似可以定义  $n+1$  元齐次多项式在  $\mathbb{P}^n$  中的图像  $\mathbb{P}\Gamma_f$ . 而任意二元多项式  $g(x, y)$

$$\Gamma_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : g(x, y) = 0\}.$$

被称为  $g$  在  $\mathbb{R}^2$  中的 **零点** 或 **图像**, 类似可以定义  $n$  元多项式在  $\mathbb{R}^n$  中的图像  $\Gamma_f$ .



**定理 5.2** 任意二元多项式  $g(x, y)$  在  $\mathbb{R}^2$  的图像都是某个三元的齐次多项式  $f(x, y, z)$  在  $\mathbb{P}^2$  中图像与  $\mathbb{R}^2$  的交. 即  $\Gamma_g = \mathbb{P}\Gamma_f \cap \mathbb{R}^2$ .

**证明** 换言之,

$$f(x, y) = 0 \iff g(x, y, 1) = 0.$$

这就是传统的齐次化过程, 取

$$g(x, y, z) = z^n f\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right).$$

其中  $n$  取得充分大使得  $g$  是一个多项式. □

**定理 5.3** 任何三元齐次多项式  $f(x, y, z)$ , 考虑满射

$$\pi : \Gamma_f \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{P}\Gamma_f \quad (x, y, z) \longmapsto [(x, y, z)]$$

是一个以  $\mathbb{R}^\times = \mathbb{R} \setminus \{0\}$  为纤维的纤维丛.

**证明** 考虑开覆盖

$$\mathbb{P}\Gamma_f^2 = U_1 \cup U_2 \cup U_3 = \{[(1, y, z)]\} \cup \{[(x, 1, z)]\} \cup \{[(x, y, 1)]\}.$$

例如, 考虑标准的  $U_3 = \mathbb{R}^2 \cap \mathbb{P}\Gamma_f \subseteq \mathbb{P}^2$ , 考虑

$$\varphi : U_3 \times \mathbb{R}^\times \xrightarrow{\sim} \Gamma_f \quad ([(x, y, 1)], t) \longmapsto (tx, ty, t).$$

这显然是同胚. □

我们称  $\Gamma_f$  是  $\mathbb{P}\Gamma_f$  的锥形, 如图5.4.

上面当然也有丰富多彩的几何. 称  $\mathbb{P}^2$  中由  $n$  次齐次多项式定义的零点是  $n$  次曲线. 一次曲线即直线, 其几何无非是线性代数, 如上面的 Desargues 定理 (5.3). 二次曲线即圆锥曲线的几何, 这正是读者高中所熟知的. 关于三次曲线, **Cayley-Bacharach 定理** 指出

如果两条  $\mathbb{P}^2$  的三次曲线交于九个点, 那么任意过其中八个点的三次曲线必过剩下那个点, 如图5.5.

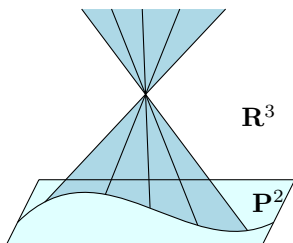
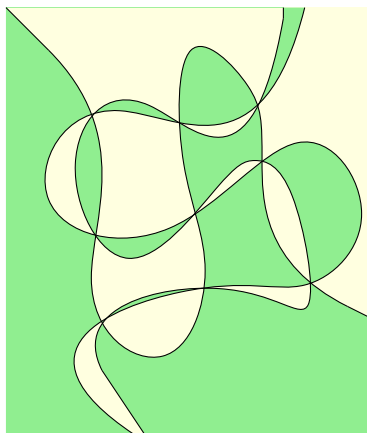
Figure 5.4:  $\mathbb{P}\Gamma_f$  的锥形

Figure 5.5: Cayley-Bacharach 定理

朴素的想法是, 齐三次多项式共 10 个系数, 则过 8 个点的齐三次系数空间为 2 维. 假设这两条三次曲线分别是  $F, G$  的零点, 他们一定线性无关, 于是  $aF + bG$  就是所有过其中八个点的三次曲线, 其中  $a, b$  不全为 0, 这样任意一条三次曲线都必过剩下那个点.

当然, 这样论证不严格, 因为我们只是朴素地认为“8 个点能够把系数空间降为 2 维”, 准确严格的论证当然是代数几何的. 几个简单的应用可见习题 5.11.

**射影平面的等价定义** 作为拓扑空间,  $\mathbb{P}^2$  有很多种其他“看见”的方式. 下面我们来逐个描述.

- 通过单位化映射  $v \mapsto \frac{v}{|v|}$  将  $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$  先粘结成  $\mathbb{S}^2$ , 再粘结对径点. 这样射影平面等同于

$$\mathbb{S}^2 / \sim \quad \text{其中 } v \sim u \iff v = \pm u.$$

即将“对径点”粘结对起来, 如图5.6. 因为  $\mathbb{S}^2$  单连通, 这说明  $\mathbb{S}^2$  是  $\mathbb{P}^2$  的万有覆盖空间.

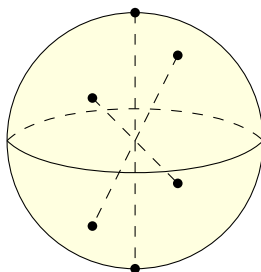


Figure 5.6: 球面对径点的粘合

- 将  $\mathbb{S}^2$  中处在上半空间  $\mathbb{H}^3 = \{(x, y, z) : z > 0\}$  的点先粘到对径点, 再将剩下的  $\{(x, y, 0)\}$  的点粘到对径点, 如图5.7.

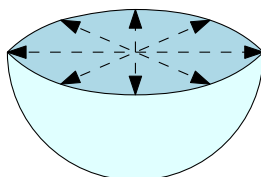


Figure 5.7: 上半球面对径点粘合

进一步粘结就如图5.8. (注意, 图5.8最后的中轴实际上是不相交的, 就像 Klein 瓶的放在三维空间中自交了一样, 是“趁交线不注意穿过去的”).

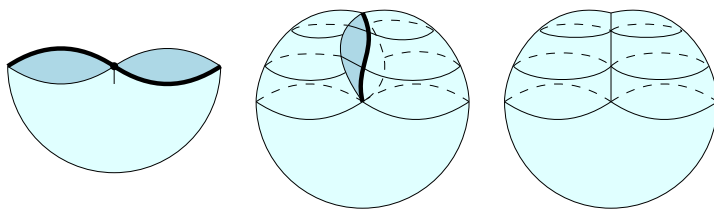


Figure 5.8: 圆周对径点粘合

- 紧接着上一步. 粘上半球面的对径点得到的图形同胚于  $\mathbb{D}^2$ , 这样尚未粘结对应的对径点是  $\mathbb{D}^2$  边界  $S^1$  上对径点, 这还可以表示为  $Cw$ -复形的结构如图5.9.

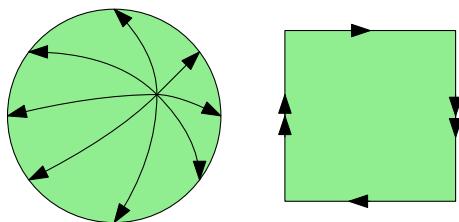


Figure 5.9: 圆盘边界的对径点粘合

我们已经知道如下几个事实.

**定理 5.4** 射影平面是连通的, 紧致的, 不可定向的拓扑空间, 基本群是  $\{\pm 1\}$ .

**证明** 射影平面  $\mathbb{P}^2$  是连通的, 紧致的, 因为其同胚于  $S^2$  的粘合.

如图5.10, 可观测出  $\mathbb{P}^2$  不可定向.

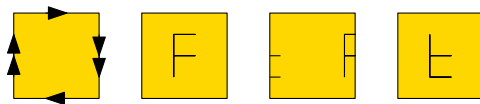
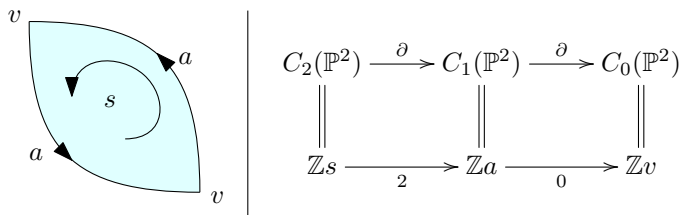


Figure 5.10: 射影平面不可定向

射影平面  $\mathbb{P}^2$  基本群是  $\{\pm 1\}$ , 生成元对应于  $S^2$  上环绕半周到达对径点. 这既来自于万有覆盖空间, 也来自于  $Cw$ -复形基本群的计算.  $\square$

作为拓扑空间 假如我们不拘泥于“三角形”的同调, 我们甚至可以使用“二边形”计算同调,



于是同调群可以直接计算出结果如下.

$$H_0(\mathbb{P}^2) = \mathbb{Z} \quad H_1(\mathbb{P}^2) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \quad H_2(\mathbb{P}^2) = 0 \quad n \geq 3 \Rightarrow H_n(\mathbb{P}^2) = 0$$

$$H^0(\mathbb{P}^2) = \mathbb{Z} \quad H^1(\mathbb{P}^2) = 0 \quad H^2(\mathbb{P}^2) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \quad n \geq 3 \Rightarrow H^n(\mathbb{P}^2) = 0$$

这可以间接验证 **Hurewicz 定理** 和 **万有系数定理** 的非平凡情形, 以及在不可定向的情形下, 最后一个上同调总是  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ , 以及此时常义的 **Poincaré 对偶** 失效. 不过如果换做  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  作系数, 那么上述复形是平凡的, 于是

$$H_0(\mathbb{P}^2; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = H_1(\mathbb{P}^2; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = H_2(\mathbb{P}^2; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \quad n \geq 3 \Rightarrow H_n(\mathbb{P}^2) = 0$$

$$H^0(\mathbb{P}^2; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = H^1(\mathbb{P}^2; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = H^2(\mathbb{P}^2; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \quad n \geq 3 \Rightarrow H^n(\mathbb{P}^2) = 0$$

这又验证了 **万有系数定理** 和不可定向的 **Poincaré 对偶**. 实际上系数为  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  上同调环是  $\mathbb{Z}[\xi]/(\xi^{n+1} - 1)$ .

如果要计算同伦群注意到  $S^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$  是覆叠映射, 放入纤维丛的长正合序列, 因此  $n \geq 2$  时,  $\pi_n(S^2, *) = \pi_n(\mathbb{P}^2, *)$ .

一个经典的问题是  $\mathbb{P}^2$  能否嵌入  $\mathbb{R}^3$  之中? 就像图5.8一样, 似乎放入三维空间中必须“自交”. 方便起见, 问题转化到证明  $\mathbb{P}^2$  能否嵌入  $S^3$  之中, 假如可以嵌入, 那么 **Alexander 对偶** 给出

$$\tilde{H}^q(\mathbb{P}^2) \cong \tilde{H}_{n-1-q}(S^3 \setminus \mathbb{P}^2).$$

令  $q = 2, n = 3$  得到

$$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \tilde{H}^2(\mathbb{P}^2) \cong \tilde{H}_0(S^3 \setminus \mathbb{P}^2) \in (\text{自由 Abel 群}),$$

矛盾.

作为微分流形 想要赋予微分流形的结构, 需要给出坐标卡. 显然,

$$\mathbb{P}^2 = \{(x, y, z) : x \neq 0\} \cup \{(x, y, z) : y \neq 0\} \cup \{(x, y, z) : z \neq 0\}.$$

给出开覆盖, 将上述三个开集分别记为  $U_{x \neq 0}, U_{y \neq 0}, U_{z \neq 0}$ , 那么坐标卡应该给作

$$\begin{aligned} \varphi_x : U_{x \neq 0} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 & \varphi_z : U_{z \neq 0} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ [(x, y, z)] &\longmapsto \left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right), & [(x, y, z)] &\longmapsto \left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right). \end{aligned}$$

不难发现  $S^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$  的覆叠映射是光滑的, 因此局部的信息和  $S^2$  相同.

假如将  $S^2$  上的度量结构搬到  $\mathbb{P}^2$  上, 不难发现,  $\mathbb{P}^2$  空间中两点的距离正是对应  $\mathbb{R}^3$  中一维子空间的夹角.

熟知的结果是 Lie 群总是可定向的, 于是  $\mathbb{P}^2$  不可能赋予 Lie 群的结构. 但  $\mathbb{P}^1$  与  $S^1$  微分同胚, 而  $S^1 \subseteq \mathbb{C}$  具有 Lie 群结构. 后面我们还会看到  $\mathbb{P}^3$  与  $SO_3$  微分同胚, 这赋予  $\mathbb{P}^3$  以 Lie 群结构.

**习题 5.5** 证明 *Klein* 瓶不可定向.

**习题 5.6** 证明 *Klein* 瓶不能嵌入  $\mathbb{R}^3$ .

**问题 5.7** 证明射影平面  $\mathbb{P}^2$  同胚于将  $\mathbb{D}^2$  的边界  $S^1$  和 *Möbius* 的边界粘起来得到的拓扑空间, 如图 5.11. (提示: 如图 5.12.)

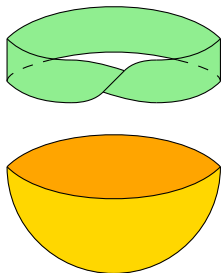


Figure 5.11: 圆盘的边界粘上 *Möbius* 的边界

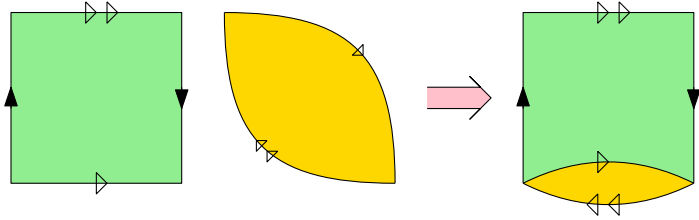


Figure 5.12: 圆盘的边界粘上 Möbius 的边界

问题 5.8 更一般地, 证明  $\mathbb{P}^n$  的同调群,  $H_0(\mathbb{P}^\bullet) = \mathbb{Z}$ , 且有下表

	$\mathbb{P}^1$	$\mathbb{P}^2$	$\mathbb{P}^3$	$\mathbb{P}^4$	$\mathbb{P}^5$	$\mathbb{P}^6$	...
$H_1$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}/2$	$\mathbb{Z}/2$	$\mathbb{Z}/2$	$\mathbb{Z}/2$	$\mathbb{Z}/2$	...
$H_2$		0	0	0	0	0	...
$H_3$			$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}/2$	$\mathbb{Z}/2$	$\mathbb{Z}/2$	...
$H_4$				0	0	0	...
$H_5$					$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}/2$	...
$H_6$						0	...
$\vdots$							$\ddots$

上同调群  $H^0(\mathbb{P}^\bullet) = \mathbb{Z}$ , 且有下表

	$\mathbb{P}^1$	$\mathbb{P}^2$	$\mathbb{P}^3$	$\mathbb{P}^4$	$\mathbb{P}^5$	$\mathbb{P}^6$	...
$H^1$	$\mathbb{Z}$	0	0	0	0	0	...
$H^2$		$\mathbb{Z}/2$	$\mathbb{Z}/2$	$\mathbb{Z}/2$	$\mathbb{Z}/2$	$\mathbb{Z}/2$	...
$H^3$			$\mathbb{Z}$	0	0	0	...
$H^4$				$\mathbb{Z}/2$	$\mathbb{Z}/2$	$\mathbb{Z}/2$	...
$H^5$					$\mathbb{Z}$	0	...
$H^6$						$\mathbb{Z}/2$	...
$\vdots$							$\ddots$

由此可知, 在  $n$  是奇数时  $\mathbb{P}^n$  可以定向, 在  $n$  是偶数则不可定向. (提示: 利用“二边形”(严格地应该使用胞腔同调, 并运用映射度理论得知系数), 得到复形

形如

$$\dots \rightarrow \underbrace{C_2(\mathbb{P}^n)}_{=\mathbb{Z}} \xrightarrow{2} \underbrace{C_1(\mathbb{P}^n)}_{=\mathbb{Z}} \xrightarrow{0} \underbrace{C_0(\mathbb{P}^n)}_{=\mathbb{Z}} \rightarrow 0.$$

其中 0 和 2 循环. 第二个表格的计算可以直接计算, 也来自于万有系数定理. 注意到

$$\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}/2, \mathbb{Z}) = 0, \quad \mathrm{Ext}(\mathbb{Z}/2, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/2, \quad \mathrm{Ext}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) = 0.$$

万有系数定理指出  $H^n = \mathrm{Ext}(H_{n-1}, \mathbb{Z}) \oplus \mathrm{Hom}(H_n, \mathbb{Z})$ .

**问题 5.9** 考虑  $\mathbb{P}^2$  中的圆  $x^2 + y^2 = z^2$ .

(1) 证明在  $(x_0, y_0, z_0)$  与圆相切的直线是  $xx_0 + yy_0 = zz_0$ . (提示: 这既可以直接计算切线, 也可以考虑  $x^2 + y^2 - z^2 = 0$  的法向量, 即  $x^2 + y^2 - z^2$  的梯度.)

(2) 与  $x^2 + y^2 = z^2$  相切的所有直线的对偶还是  $x^2 + y^2 = z^2$ . (提示: 注意到, 每一点对偶到  $[(x_0, y_0, -z_0)]$ , 于是恰好还是圆.)

(3) 证明 **Pascal 定理** 的如下对偶版本. 在圆上任意取六个点  $A, B, C, A', B', C'$ , 过他们分别作圆的切线  $a, b, c, a', b', c'$ , 那么下列三条直线共点

$$(a \cap b')(a' \cap b), \quad (b \cap c')(b' \cap c), \quad (c \cap a')(c' \cap a).$$

如图 5.13. (提示: 原本的版本已在习题 3.17 中证明, 这里是其对偶版本.)

**问题 5.10 (交比)** 在传统射影几何中, 一个重要的概念是 **交比 (cross ratio)**. 对于射影直线  $\mathbb{P}^1$  上的四点  $M, N, P, Q$ , 假设  $P = \lambda M + \mu N, Q = \sigma M + \tau N$  其中  $\lambda + \mu = 1, \sigma + \tau = 1$ . 定义交比

$$(M, N; P, Q) = \frac{\mu\sigma}{\lambda\tau} \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}.$$

(1) 如果采用射影坐标, 假设  $M = [(x, 1)], N = [(y, 1)], P = [(z, 1)], Q = [(w, 1)]$ , 其中  $x, y, z, w \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ , 证明交比就是

$$(M, N; P, Q) = \frac{(x-z)(y-w)}{(y-z)(x-w)}.$$



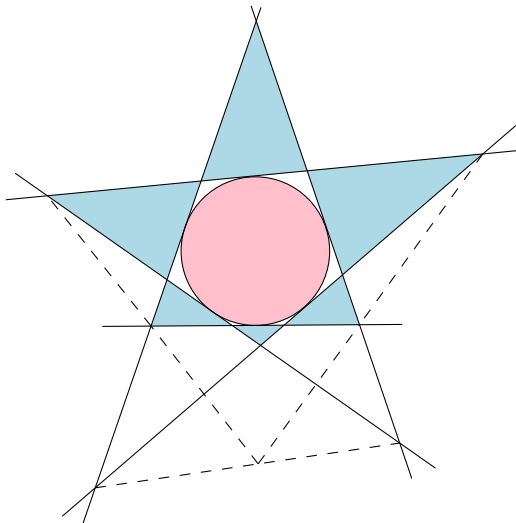


Figure 5.13: Pascal 定理的对偶版本

(提示: 注意到

$$z = \frac{y-z}{y-x}x + \frac{x-z}{x-y}y \quad w = \frac{y-w}{y-x}x + \frac{x-w}{x-y}y.$$

这 and 第3章定义的交比是一致的.)

(2) 证明  $\mathrm{PGL}_1(\mathbb{R})$  在上面的作用是不改变交比的. 其中  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{PGL}_1(\mathbb{R})$  的作用是

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : \mathbb{P}^1 \longrightarrow \mathbb{P}^1 \quad [(x, y)] \longmapsto [(ax + by, cx + dy)].$$

或者记为  $x \mapsto \frac{ax+by}{cx+dy}$ , 并且关于接受无穷的一些运算.

(3) 如果双射  $\varphi : \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$  保持交比, 证明  $\varphi$  作用一定来自于某个  $\mathrm{PGL}_1(\mathbb{R})$ . (提示: 和第3章处理方法一样, 这个映射一定取作  $\varphi(x) = (\varphi(x), 1; 0, \infty) = (x, \varphi^{-1}(1), \varphi^{-1}(0), \varphi^{-1}(\infty))$ .)

(4) 如果双射  $\varphi : \mathbb{P}^n \rightarrow \mathbb{P}^n$  将共线的点映成共线的点, 且保持交比, 证明  $\varphi$  作用一定来自于某个  $\mathrm{PGL}_n(\mathbb{R})$ . (提示: 首先, 可以通过  $\mathrm{PGL}_n(\mathbb{R})$  调整  $\varphi$  使得

$$\varphi(\{x_i = 0\}) = \{x_i = 0\}.$$

在每一个  $\{x_i \neq 0\}$  上考虑, 此时同胚于  $\mathbb{R}^n$ . 注意到, 在  $x, y$  所在直线上,  $(x, y; \frac{x+y}{2}, \infty) = -1$ , 故  $\varphi$  保持中点, 从而这说明  $\varphi$  保持平行四边形, 从而保证向量的加法. 数乘也可以类似的方法验证. 这说明在每个  $\{x_i \neq 0\}$  上都是线性的, 注意到上面的假设还要求这一映射的对角映射. 通过计算可知这一映射是同一个数乘阵, 再调整一个  $\text{PGL}_n(\mathbb{R})$  元素, 在每个  $\{x_i \neq 0\}$  上是单位阵, 这样整体就是  $\text{id}$ . )

**问题 5.11** 下面是正文中提到的 *Cayley-Bacharach* 定理的几个应用.

(1) 令  $F$  是一个三元齐三次多项式,  $\{F = 0\}$  上有九个点

$$\begin{array}{ccc} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{array}$$

如果每一行的点都共线, 前两列的点也共线, 那么第三列也共线, 如图 5.14. (提示: 考虑三条直线方程相乘.)

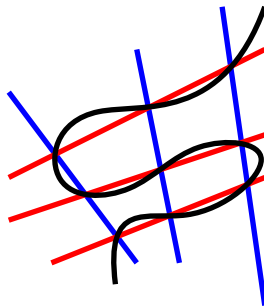


Figure 5.14: 笼子定理

(2) 证明 *Pascal* 定理, 习题 3.17. 此时可以把圆换成任意的二次曲线 (三元齐二次多项式的零点). (提示: 如图 5.15, 或者在 (1) 中取  $F$  是二次曲线和直线的并 (即方程相乘).)

(3) 验证一般的椭圆曲线 (4.10) 的加法 (见第 4 章最后, 如图 5.16) 的结合

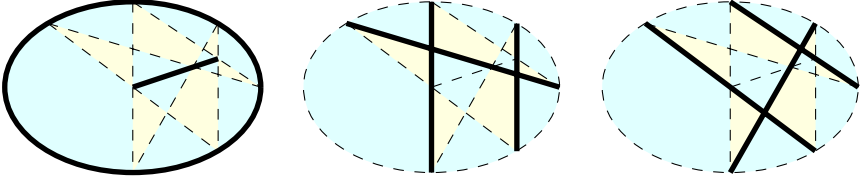


Figure 5.15: Pascal 定理

率. (提示: 在 (1) 的填入下面的点

$$\begin{array}{ccc}
 a & b & -(a+b) \\
 c & ? & a+b \\
 -(a+c) & a+c & \infty
 \end{array}$$

其中  $\infty$  是椭圆曲线唯一的无穷远点 (也是零点), 中间问号处既是  $-(c+(a+b))$  又是  $-(b+(a+c))$ .)

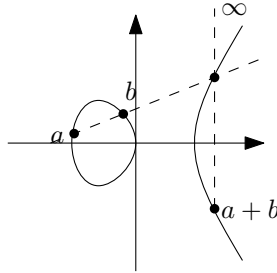


Figure 5.16: 椭圆曲线的加法

(1) 姜伯驹. 同调论.

(2) R.Hartshorne. *Algebraic Geometry*.

# Chapter 6

## 上半平面 $\mathbb{H}^2$

上半平面的定义极其简单,  $\mathbb{H}^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$ , 我们约定记号  $\overline{\mathbb{H}}^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0\}$ ,  $\partial\mathbb{H}^2 = \overline{\mathbb{H}}^2 \setminus \mathbb{H}^2 = \{(x, 0)\}$ . 更一般地,  $\mathbb{H}^n = \{(x_1, \dots, x_n) : x_n > 0\}$ ,  $\overline{\mathbb{H}}^n = \{(x_1, \dots, x_n) : x_n \geq 0\}$ ,  $\partial\mathbb{H}^n = \overline{\mathbb{H}}^n \setminus \mathbb{H}^n = \{(x_1, \dots, x_{n-1}, 0)\}$ .

**作为拓扑空间** 首先, 不难验证  $(0, \infty)$  和  $(-\infty, \infty)$  通过对数映射  $x \mapsto \log x$  建立同胚. 因此, 类似地,  $\mathbb{H}^2$  同胚于  $\mathbb{R}^2$ . 但是  $\overline{\mathbb{H}}^2$  则不然.

**命题 6.1** 闭上半平面  $\overline{\mathbb{H}}^2$  与平面  $\mathbb{R}^2$  不同胚.

**证明** 直觉是,  $\overline{\mathbb{H}}^2$  是有“边”,  $\partial\mathbb{H}^2$ . 注意到  $\mathbb{R}^2$  去掉一点都同伦于  $S^1$ , 从而基本群为  $\mathbb{Z}$ . 但是  $\overline{\mathbb{H}}^2$  去掉“边”上一点却还是可缩的, 因此基本群是 0. 如图 6.1. 从而闭上半平面  $\overline{\mathbb{H}}^2$  与平面  $\mathbb{R}^2$  不可能同胚.  $\square$

这当然可以推广到  $n$  为, 注意到  $\mathbb{R}^n$  任意删去一点同伦等价于  $S^{n-1}$ ,  $\overline{\mathbb{H}}^n$  删去  $\partial\mathbb{H}^n$  上的一点是可缩的.

仿照这一技巧, 我们可以在带边流形上确定“边界点”. 不过在此之前, 让我们回忆流形和带边流形的定义.

回忆拓扑空间  $M$  被称为**流形**, 如果任意一点  $p \in M$ , 都有邻域同胚于  $\mathbb{R}^n$  的某个开集. 这可以加强为任意一点  $p \in M$ , 都有邻域同胚于  $\mathbb{R}^n$ . 甚至还

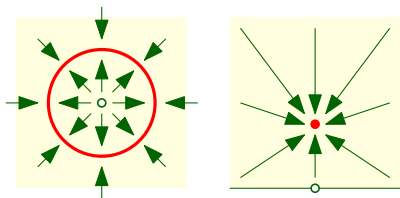


Figure 6.1: 闭上半平面  $\overline{\mathbb{H}}^2$  与平面  $\mathbb{R}^2$  不同胚

可以加强为任意一点  $p \in M$ , 都有邻域基, 每个邻域同胚于  $\mathbb{R}^n$  组成的. 这是因为,  $\mathbb{R}^n$  上任意点的邻域都可以“缩小”成同胚于  $\mathbb{R}^n$  的开集. 例如, 端详同胚  $(-1, 1)^n \cong \mathbb{R}^n$ .

如果  $M$  连通, 这里欧式空间维数  $n$  是固定的, 这被称为  $M$  的维数, 记作  $\dim M$ . 这是因为, 对于  $m \neq n$ , “有同胚于  $\mathbb{R}^n$  的邻域”和“有同胚于  $\mathbb{R}^m$  的邻域”互相抵触, 从而每点维数局部都是常数. 具体来说, 如果同时成立, 那么挑选  $p$  的邻域  $V \subseteq U \subseteq W$ , 其中  $V, W$  同胚于  $\mathbb{R}^n$ ,  $U$  同胚于  $\mathbb{R}^m$ , 那么

$$\left[ \begin{array}{ccc} V \setminus \{x\} & \xrightarrow{\subseteq} & W \setminus \{x\} \\ \searrow \subseteq & & \nearrow \subseteq \\ & U \setminus \{x\} & \end{array} \right] = (\text{取 } n-1 \text{ 阶简约同调群}) \Rightarrow \left[ \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \xrightarrow{1} & \mathbb{Z} \\ \searrow & & \nearrow \\ & 0 & \end{array} \right],$$

矛盾!

回忆拓扑空间  $M$  被称为**带边流形**, 如果任意一点  $p \in M$ , 都有邻域同胚于  $\overline{\mathbb{H}}^n$  的某个开集. 当然, 这也可被加强为任意一点  $p \in M$ , 都有邻域基, 每个邻域同胚于  $\mathbb{R}^n$  或  $\overline{\mathbb{H}}^n$ , 且在后者的情况  $p$  被映到  $\partial\mathbb{H}^n$ . 这是因为  $\mathbb{H}^n$  上任意点的邻域都可以“缩小”成同胚于  $\mathbb{R}^n$  的开集, 而  $\partial\mathbb{H}^n$  上的点则可以“缩小”成同胚于  $\overline{\mathbb{H}}^n$  的开集.

实际上, 对于一点  $p$ , “邻域基的邻域都同胚于  $\mathbb{R}^n$ ”和“邻域基的邻域都同胚于  $\overline{\mathbb{H}}^n$ , 且  $p$  被映到  $\partial\mathbb{H}^n$ ”是相抵触的, 于是前者就被称为  $M$  的内部, 记为  $M^\circ$ , 后者就被称为  $M$  的边界, 记为  $\partial M$ . 具体来说, 如果同时成立, 那么挑

选  $p$  的邻域  $V \subseteq U \subseteq W$ , 其中  $V, W$  同胚于  $\mathbb{R}^n$ ,  $U$  同胚于  $\overline{\mathbb{H}^n}$ , 那么

$$\left[ \begin{array}{ccc} V \setminus \{x\} & \xrightarrow{\subseteq} & W \setminus \{x\} \\ & \searrow \subseteq & \nearrow \subseteq \\ & U \setminus \{x\} & \end{array} \right] = (\text{取 } n-1 \text{ 阶简约同调群}) \Rightarrow \left[ \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \xrightarrow{1} & \mathbb{Z} \\ & \searrow & \nearrow \\ & 0 & \end{array} \right],$$

矛盾!

当然, 上述一切均可用 **切除定理** 说明, 而无需邻域基嵌套, 注意到切除引理断言

$$H_m(M, M \setminus \{p\}) = H_m(U, U \setminus \{p\}).$$

其中  $U$  是  $p$  的邻域. 而

$$H_m(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & m = n-1 \\ 0 & m \neq n-1 \end{cases} \quad H_m(\overline{\mathbb{H}^n}, \overline{\mathbb{H}^n} \setminus \{0\}) = 0.$$

于是这借以区分维数和边界.

回顾我们从 (1.1) 开始, 到刚刚的上述操作, 所谓“删点法”在证明拓扑空间不同胚方面一直起着非常重要的作用. 实际上, 相对同调群无非是高级的, 更有规律可寻的“删点法”.

**作为复流形** 下面我们先看作为复流形的上半平面. 下面我们来求  $\mathbb{H}^2$  的全纯自同构群. 回顾 (3.4),

$$\begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix} : \mathbb{D}^2 \leftrightarrow \mathbb{H}^2 : \begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{pmatrix}.$$

给出全纯同构. 而在  $\mathbb{D}^2$  上利用 Schwarz 引理知道,  $\mathbb{D}^2$  的全纯自同构群由 Blaschke 变换和旋转构成. 当然, 通过直接的矩阵计算就可以算出  $\mathbb{H}^2$  的全纯自同构群  $\text{Aut } \mathbb{H}^2$ . 不过我们采取更“几何”的证法.

- 因为 Blaschke 变换和旋转都是 Möbius 变换,  $\mathbb{H}^2$  的全纯自同构也都是 Möbius 变换. 因此  $\text{Aut } \mathbb{H}^2 \subseteq \text{PGL}_1(\mathbb{C})$ , 其中  $\text{PGL}_1(\mathbb{C})$  是一阶 **射影变换群**, 即  $\text{GL}_2(\mathbb{C})$  商去中心 (即数乘阵).

- 因为将实数轴映为实数轴, 因此系数已经被限定在实数上. 因此  $\text{Aut } \mathbb{H}^2 \subseteq \text{PGL}_1(\mathbb{R})$ , 其中  $\text{PGL}_1(\mathbb{R})$  是一阶射影变换群, 即  $\text{GL}_2(\mathbb{R})$  商去中心 (即数乘阵).
- 注意到任意  $\varphi = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{GL}_2(\mathbb{R})$ ,

$$\Im(\varphi z) = \Im\left(\frac{az + b}{cz + d}\right) = \frac{\det \varphi}{|cz + d|^2} \Im z.$$

其中  $\Im$  表示虚部. 因此  $\text{Aut } \mathbb{H}^2$  正是  $\text{PGL}_1(\mathbb{R})$  中那些原像行列式取正数的那些.

- 于是假如我们在  $\text{SL}_2(\mathbb{R})$  中寻找原像, 不难发现

$$\text{Aut } \mathbb{H}^2 = \text{SL}_2(\mathbb{R}) / \{\pm 1\}$$

其中 1 是单位阵.

如果通过上面的  $\mathbb{D}^2 \leftrightarrow \mathbb{H}^2$ , 不难计算出

$$\text{Aut } \mathbb{D}^2 = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} : |\alpha|^2 - |\beta|^2 = 1 \right\} / \{\pm 1\}.$$

根据单值化定理 (uniformization theorem), 单连通的 Riemann 曲线仅有复平面  $\mathbb{C}$ , Riemann 球  $\mathbb{S}^2$ , 以及上半平面  $\mathbb{H}^2$  三例. 我们已经知道他们的全纯自同构群, 如下

- $\text{Aut } \mathbb{C}$  是所谓的复仿射变换群, 即

$$\left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : \alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, \beta \in \mathbb{C} \right\}.$$

用半直积的记号可写作  $\text{GL}_1(\mathbb{C}) \ltimes \mathbb{C}$ .

- $\text{Aut } \mathbb{S}^2$  是一阶复射影变换群, 即

$$\text{PGL}_1(\mathbb{C}) = \text{GL}_2(\mathbb{C}) / \mathbb{C}^\times.$$

其中  $\mathbb{C}^\times$  表示全体数乘阵.

- $\text{Aut } \mathbb{H}^2$  是实 **特殊射影变换群**,

$$\text{PSL}(\mathbb{R}) = \text{SL}_2(\mathbb{R})/\{\pm 1\}.$$

其中  $1$  是单位阵.

因此理论上我们已经可以知道任何 Riemann 曲面的全纯自同构群 — 找到万有覆盖空间再看何时可回到原曲面.

实际上, 他们还满足下述性质. 对于

$$(X, p) = (\mathbb{C}, 0), (\mathbb{S}^2, \infty), (\mathbb{H}^2, i) \text{ 抑或是 } (\mathbb{D}^2, 0).$$

都有

- 全纯自同构  $\text{Aut } X$  是可递的. 即任意  $x, y \in X$ , 存在  $g \in \text{Aut } X$  使得  $gx = y$ .
- 点  $p$  的稳定化子在  $p$  点切空间方向上的是可递的. 即任意  $\partial, \bar{\partial} \in \text{Tan}_p X$ , 存在  $g \in \text{Aut } X$  使得  $gx = x$ ,  $(dg)(\partial)$  和  $\bar{\partial}$  同向.
- 综合上述两点,  $\text{Aut } X$  可以将一点处的切向量搬动到任意另外一点处的任意切向量的同向, 如图6.2.

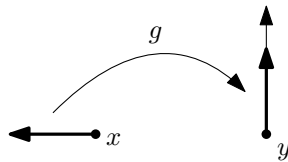


Figure 6.2: 方向可递

对于  $(\mathbb{H}^2, i)$  的情况, 这是因为

- 注意到  $\begin{pmatrix} y & x \\ 1 & 1 \end{pmatrix} i = x + yi$ , 当然, 为了写进  $\text{SL}_2(\mathbb{R})$  中应该写成  $\begin{pmatrix} y^{1/2} & xy^{-1/2} \\ y^{-1/2} & y^{-1/2} \end{pmatrix}$ .
- 注意到直接计算表明  $\text{Stab}_i = \text{SO}_2/\{\pm 1\}$ , 其中

$$\text{SO}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} : \theta \in \mathbb{R} \right\}.$$



故在  $i$  处, 根据第3章的  $(\sharp)$  的计算,  $\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$  的作用是

$$\frac{1}{(\cos \theta i + \sin \theta)^2} dz = e^{-2\theta} dz.$$

这说明作用是旋转  $-2\theta$ .

第二点或许切换回  $(\mathbb{D}^2, 0)$  或许更容易看清, 此时, 根据 Schwarz 引理或者同样的直接计算,  $\text{Stab}_0$  全部由旋转组成.

**作为微分流形** 下面, 我们需要稍微绕路看一下所谓 Minkowski 度量. 在  $\mathbb{R}^3$  中, 如果我们将坐标记为  $(x, y, t)$ , 其中  $(x, y)$  理解为空间, 注意到二次型

$$(x, y, t) \mapsto t^2 - x^2 - y^2$$

诱导了有相对论中常用的 **Minkowski 度量**,

$$g = dt^2 - dx^2 - dy^2.$$

在此意义下的“单位双曲面”,

$$\mathbb{H}^{1,1} = \{(x, y, z) : t^2 - x^2 - y^2 = 1\}$$

就被称为 **双曲面楔形**, 其上带有自然诱导的 Minkowski 度量. 基于对称性和连通性, 我们会考虑  $\mathbb{H}_{>0}^{1,1} = \{(x, y, t) \in \mathbb{H}^{1,1} : t > 0\}$ .

紧接着, 我们考虑类似的球极投影的“双曲极投影”, 可作双射  $P : \mathbb{H}_{>0}^{1,1} \rightarrow \mathbb{D}^2$  使得  $x, P(x), (0, 0, -1)$  处在同一直线, 如图6.3. 换句话说就是躺在双曲面的下顶点上看到的上半叶双曲面.

**定理 6.2** 双曲极投影的逆映射  $\mathbb{D}^2 \xrightarrow{\tau} \mathbb{H}_{>0}^{1,1}$  的第一基本形式为

$$I = \frac{4}{(1 - u^2 + v^2)^2} (du^2 + dv^2).$$

**证明** 如同 (3.3), 这也来自暴算. 设  $r^2 = x^2 + y^2$ , 基于对称性考虑一维的情形, 如图6.4. 计算出  $y = \frac{1}{r}x - 1$  与  $-x^2 + y^2 = 1$  的另一个交点. 一个投机取巧的方法是将方程写作

$$(-y) = -\frac{1}{ir}(ix) + 1 \quad (ix)^2 + (-y)^2 = 1$$

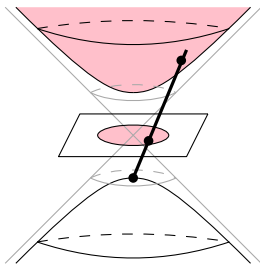


Figure 6.3: 双曲极投影

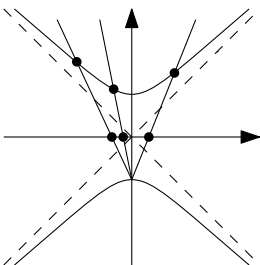


Figure 6.4: 双曲极投影

照搬 (3.3) 的结果得到另一个交点坐标  $(x, y)$ , 满足  $(xi, -y) = \left(\frac{2ri}{-r^2+1}, \frac{-r^2-1}{-r^2+1}\right)$ .  
逆映射是

$$(u, v) \mapsto \left( \frac{2u}{-u^2 - v^2 + 1}, \frac{2v}{-u^2 - v^2 + 1}, -\frac{u^2 + v^2 + 1}{-u^2 - v^2 + 1} \right).$$

之后当然可以继续暴算, 不过同样利用“投机取巧法”, 将上式写成

$$(u, v) \mapsto \begin{pmatrix} i \\ i \\ 1 \end{pmatrix} \left( \frac{2iu}{(iu)^2 + (iv)^2 + 1}, \frac{2iv}{(iu)^2 + (iv)^2 + 1}, \frac{(iu)^2 + (iv)^2 + 1}{(iu)^2 + (iv)^2 - 1} \right).$$

那么再度利用 (3.3) 的结果得到

$$g(r_u, r_v) = \frac{4}{((iu)^2 + (iv)^2 + 1)^2} = g(r_v, r_v) \quad g(r_u, r_v) = 0.$$

其中  $g = dt^2 - du^2 - dv^2$  是上文提到的 Minkowski 度量. 将复数化简, 便得想要的的第一基本形式.  $\square$

上述 (6.2) 被称为 **Poincaré 上圆盘模型**.

再度回顾 (3.4), 假如记  $\varphi = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{pmatrix} : \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{D}^2$  是全纯同构, 便得到新的参数化  $r \circ \varphi : \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{H}_{>0}^{1,1}$ .

**命题 6.3** 上述参数化  $r \circ \varphi : \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{H}_{>0}^{1,1}$  的第一基本形式为

$$I = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}.$$

用复数写就是  $\frac{|dz|^2}{(\Im z)^2}$ , 其中  $z = x + yi$ ,  $\Im$  表示虚部.

**证明** 第3章中 (#) 表明

$$d\varphi = \frac{2}{(-iz + 1)^2} dz$$

假如在  $\mathbb{D}^2$  上用  $u + iv$  作坐标,  $\mathbb{H}^2$  上用  $x + yi$  作坐标, 于是两边同时取模,

$$du^2 + dv^2 = \frac{4}{|-i(x + yi) + 1|^4} (dx^2 + dy^2).$$

再计算

$$1 - u^2 - v^2 = 1 - \left| \frac{x + iy - i}{-i(x + iy) + 1} \right|^2.$$

故

$$\begin{aligned} I &= \frac{4}{(1 - u^2 + v^2)^2} (du^2 + dv^2) \\ &= \frac{4}{\left(1 - \left| \frac{x + iy - i}{-i(x + iy) + 1} \right|^2\right)^2 \frac{4}{|-i(x + iy) + 1|^4}} (dx^2 + dy^2) \\ &= \frac{16}{(|-i(x + iy) + 1|^2 - |x + iy - i|^2)^2} (dx^2 + dy^2) \\ &= \frac{16}{\left(\left((1 + y)^2 + x^2\right) - \left((1 - y)^2 + x^2\right)\right)^2} (dx^2 + dy^2) \\ &= \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}. \end{aligned}$$

命题得证.  $\square$

上述 (6.3) 被称为 **Poincaré 上半平面模型**.

通过正交标架, 我们可以容易地计算 Gauss 曲率, 不难发现切向量场  $X = y \frac{\partial}{\partial x}$  和  $Y = y \frac{\partial}{\partial y}$  正交, 对偶基是  $\omega_1 = \frac{dx}{y}$  和  $\omega_2 = \frac{dy}{y}$ . 利用结构方程

$$\begin{cases} d\omega_1 = \omega_{12} \wedge \omega_2 \\ d\omega_2 = \omega_{21} \wedge \omega_1 \\ \omega_{12} + \omega_{21} = 0 \end{cases}, \text{ 可得 } \omega_{12} = \frac{dx}{y}. \text{ 于是 Gauss 曲率}$$

$$K = -\frac{d\omega_{12}}{\omega_1 \wedge \omega_2} = -\frac{-\frac{1}{y^2} dy \wedge dx}{\frac{1}{y^2} dx \wedge dy} = -1$$

这是常数. 这样, 我们已经得到 Gauss 曲率是常数的三类空间, 如下

- 平面  $\mathbb{R}^2$ , Gauss 曲率为 0.

- 球面  $\mathbb{S}^2$ , Gauss 曲率为 1.

一般地, 想要得到曲率为  $\frac{1}{R^2}$  的空间, 只需要考虑  $R \cdot \mathbb{S}^2$ .

- 双曲面  $\mathbb{H}_{>0}^{1,1}$ , Gauss 曲率为  $-1$ .

一般地, 想要得到曲率为  $-\frac{1}{R^2}$  的空间, 只需要考虑  $R \cdot \mathbb{H}_{>0}^{1,1}$ .

此时, 回顾我们之前计算的全纯自同构群,

$$\text{Aut } \mathbb{H}^2 = \text{SL}_2(\mathbb{R}) / \{\pm 1\}.$$

注意到, 任意  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{GL}_2(\mathbb{R})$ , 假设  $w = Az$ , 那么不难计算

$$dw = \frac{\det A}{(cz + d)^2} dz \quad \Im w = \frac{\det A}{|cz + d|^2} \Im w.$$

其中  $\Im$  表示虚部, 根据 (6.3), 这说明  $A$  的作用是保距的. 这样, 我们知道  $\text{SL}_2(\mathbb{R}) / \{\pm 1\}$  也是  $\mathbb{H}^2$  的保距保定向映射映射构成的群, 因为

- 如果保持一点和一个切向量不变, 那么一切都通过测地线推出, 换言之, 给出了测地坐标系的同构.
- $\text{SL}_2(\mathbb{R})$  总能将一点搬到到任意一点, 也总能将一点的切向量搬到到任何一个方向 (不改变这一点). 如图6.2.

**定理 6.4** 关于  $\mathbb{H}_{>0}^{1,1}$  的测地线,

- 在 Poincaré 上圆盘模型 (6.2) 中, 所有测地线都是与单位圆周  $\{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\}$  垂直的圆周 (或直线) 的一部分.
- 在 Poincaré 上半平面模型 (6.3) 中, 所有测地线都是与实数轴  $\{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$  垂直的圆周 (或直线) 的一部分.

如图 6.5.

**证明** 我们只需要对某一个点的某一个方向的切向量证明这一结论即可, 这是因为  $SL_2$  的作用是保角的, 且可任意搬动切向量的方向. 基于对称性的考虑我们选择  $i \in \mathbb{H}^2$ , 切向量选择竖直向下, 注意到对折  $x + yi \mapsto -x + yi$  保持度量, 从而让测地线必须沿着对称轴, 于是命题得证.  $\square$

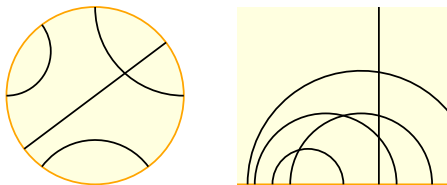


Figure 6.5:  $\mathbb{H}_{>0}^{1,1}$  上的的测地线

当然, 测地线的长度也不能简单地当做  $\mathbb{R}^2$  中的元素计算. 以测地线  $\{(0, y) : y \in \mathbb{R}\}$  为例,  $(0, a)$  到  $(0, b)$  的距离是

$$\int_a^b \sqrt{\frac{0^2 + 1^2}{t^2}} dt = \log \frac{b}{a}$$

一般地, 考虑两点  $z_1 = (x_1, y_1)$  和  $z_2 = (x_2, y_2)$ , 那么

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbb{H}^2 & \xrightarrow{\left[ \begin{pmatrix} 1 & -x_1 \\ & y_1 \end{pmatrix} \right]} & \mathbb{H}^2 & \xrightarrow{\left[ \begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{pmatrix} \right]} & \mathbb{D}^2 & \xrightarrow{\left[ \begin{pmatrix} e^{i\theta} & \\ & 1 \end{pmatrix} \right]} & \mathbb{D}^2 & \xrightarrow{\left[ \begin{pmatrix} 1 & i \\ & i \end{pmatrix} \right]} & \mathbb{H}^2 \\ z_1 & \mapsto & i & \mapsto & 0 & \mapsto & 0 & \mapsto & i \\ z_2 & \mapsto & z'_2 & \mapsto & z''_2 & \mapsto & z_2^\dagger & \mapsto & z_2^\ddagger \end{array}$$

其中选取适当的角度  $\theta$ , 就可以有

$$\begin{aligned} z_2' &= \frac{z_2 - x_1}{y_1} = \frac{x_2 - x_1}{y_1} + \frac{y_2}{y_1} i, \\ z_2'' &= \frac{(x_2 - x_1 + y_2 i) - y_1 i}{-i(x_2 - x_1 + y_2 i) + y_1} = i \frac{z_2 - z_1}{z_2 - \bar{z}_1}, \\ z_2^\dagger &= i \frac{|z_2 - z_1|}{|z_2 - \bar{z}_1|}, \\ z_2^\ddagger &= i \frac{|z_2 - z_1| + |z_2 - \bar{z}_1|}{-|z_2 - z_1| + |z_2 - \bar{z}_1|}. \end{aligned}$$

于是  $z_1, z_2$  的距离

$$d(z_1, z_2) = \log \left( \frac{|z_2 - z_1| + |z_2 - \bar{z}_1|}{-|z_2 - z_1| + |z_2 - \bar{z}_1|} \right).$$

带入  $x_\bullet, y_\bullet$ , 施以有理化,

$$\begin{aligned} d(z_1, z_2) &= \log \left( \frac{(|z_2 - z_1| + |z_2 - \bar{z}_1|)^2}{-|z_2 - z_1|^2 + |z_2 - \bar{z}_1|^2} \right) = \log \left( \frac{(|z_2 - z_1| + |z_2 - \bar{z}_1|)^2}{4y_1 y_2} \right), \\ d(z_1, z_2) &= \log \left( \frac{-|z_2 - z_1|^2 + |z_2 - \bar{z}_1|^2}{(-|z_2 - z_1| + |z_2 - \bar{z}_1|)^2} \right) = \log \left( \frac{4y_1 y_2}{(-|z_2 - z_1| + |z_2 - \bar{z}_1|)^2} \right). \end{aligned}$$

利用双曲正弦函数  $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$  或许看得更清楚,

$$\sinh \left( \frac{1}{2} d(z_1, z_2) \right) = \frac{|z_2 - z_1|}{2\sqrt{y_1 y_2}} = \frac{|z_2 - z_1|}{2\sqrt{\Im z_1 \Im z_2}}.$$

其中  $\Im$  表示虚部. 注意到  $\sinh$  是一个增函数, 因此比较长短用上面的等式足矣. 当然, 通过圆周的参数积分的方法也可以计算出相同的结果.

于是, 我们发现, 度量的不同将导致测地线的不同, 如图6.6. 其中  $\mathbb{D}^2$  的度量分别是

$$\frac{4}{(1 - u^2 + v^2)^2} (du^2 + dv^2), \quad du^2 + dv^2, \quad \frac{4}{(1 + u^2 + v^2)^2} (du^2 + dv^2).$$

前者来自  $\mathbb{H}_{>0}^{1,1}$ , 见6.2, 后者来自  $\mathbb{S}^2$ , 见 (3.3).

最后, 回顾习题3.8, 在  $\mathbb{H}^2$  上, 考虑由测地线组成的三角形, 如图6.7, 假设三个夹角分别为  $\alpha, \beta, \gamma$ , 因为其 Gauss 曲率是  $-1$ , 因此根据 **Gauss-Bonnet 定理**,

$$(\pi - \alpha) + (\pi - \beta) + (\pi - \gamma) + \int_{\Delta} -1 d(\text{面积}) = 2\pi$$

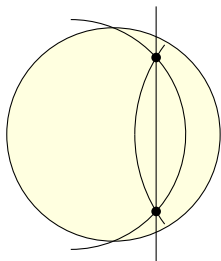


Figure 6.6: 圆盘上的测地线

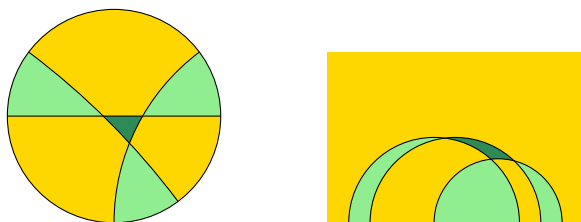


Figure 6.7: 测地线组成的三角形

故面积为  $\pi - \alpha - \beta - \gamma$ . 注意到, 我们上面的 Poincaré 上圆盘模型 (6.2) 还有 Poincaré 上半平面模型 (6.3) 都是保角的, 所以角度就是通常意义下曲线的夹角即, 切线的夹角.

在球面上, “面积” 和 “边长” 无关尚可理解, 因为球面被 “单位化” 了. 但是在双曲面上, 不可思议的情况发生了, 我们可以找到一个边长无限, 而面积有限的三角形 — 如果我们将测地线无限延长, 那么三条边的夹角趋于 0, 得到面积恰是  $\pi$ , 如图 6.8. 注意到, “端点” 在 “边界” 上的测地线都是无限长的, 因为测地线是无限延伸的.

**习题 6.5** 证明下述定义的带边流形是等价的.

拓扑空间  $M$  被称为如果可以写成  $M^\circ \sqcup \partial M$ , 其中  $M^\circ$  是通常意义下的流形, 而任意一点  $p \in \partial M$ , 在  $M$  中都有邻域  $U$  使得  $(U, U \cap \partial M)$  同胚于  $(\mathbb{H}^n, \partial \mathbb{H}^n)$ . 这里同胚含义是  $U$  同胚于  $\mathbb{H}^n$ , 且将  $U \cap \partial M$  映到  $\partial \mathbb{H}^n$ .

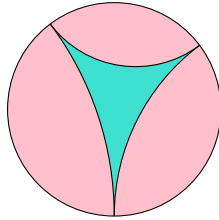


Figure 6.8: 边长无限但是面积有限的三角形

**习题 6.6** 对另外两个单连通的 *Riemann* 曲面  $(\mathbb{C}, 0)$  和  $(\mathbb{S}^2, \infty)$  验证图 6.2 的性质. 并且验证, 任何 *Riemann* 曲面  $X$  的自同构群  $\text{Aut } X$  关于某点  $p$  的自同构群的有限子群一定是循环群.

**习题 6.7** 相较于 (6.2), 另一个模型是 **Beltrami-Klein 圆盘** 模型. 这类比的是球心投影, 如图 6.9.

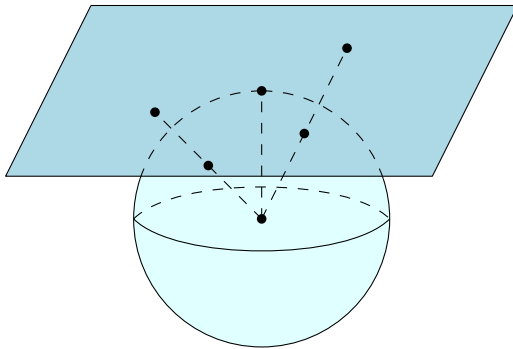


Figure 6.9: 球心投影

此时圆盘放置在  $z = 1$  平面, 投影是从  $(0, 0, 0)$  处, 如图 6.10. 证明其逆映射  $\mathbb{D}^2 \rightarrow \mathbb{H}_{>0}^{1,1}$  的第一基本形式是

$$I = \frac{du^2 + dv^2}{1 - u^2 - v^2} + \frac{(udu + vdv)^2}{(1 - u^2 - v^2)^2}$$

并证明在 *Poincaré* 圆盘上的点  $\rho e^{i\theta}$  对应到 *Klein* 圆盘的  $\frac{\rho + \frac{1}{\rho}}{2} e^{i\theta}$ , 从而得到 *Klein* 圆盘上的测地线都是直线段. (提示: 前半部分的论证无非是算一下直线



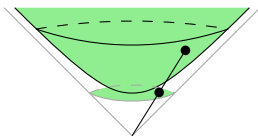


Figure 6.10: 双曲投影

斜率, 最后一点可用初等几何论证, 在 Poincaré 圆盘上找正交的圆弧, 假设圆心距离是  $a$ , 那么圆弧半径是  $\sqrt{a^2 - 1}$ , 如果  $(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta)$  在测地线上, 那么用余弦定理得到

$$a^2 - 1 = \rho^2 + a^2 - 2\rho a \cos \theta.$$

从而  $\cos \theta = \frac{\rho^2 + 1}{2a\rho}$ , 如图 6.11. 关于这时测地线是直线也不难理解, 因为球心投影也由此性质. 这让我们明白,  $\mathbb{H}_{>0}^1$  的测地线都是那些“中心”在原点的双曲线.)

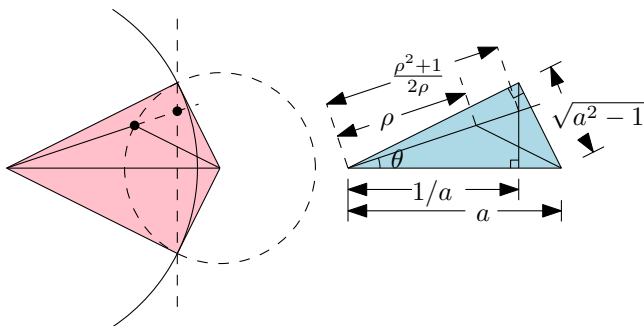


Figure 6.11: Beltrami-Klein 圆盘上的测地线

**问题 6.8** 证明 Blaschke 变换 (3.8) 在圆盘模型中保距, 从而 Blaschke 变换  $\begin{pmatrix} -1 & \alpha \\ -\alpha & 1 \end{pmatrix}$  不过是给出了  $\alpha$  处的测地坐标. (提示: 因为  $\text{Aut } \mathbb{H}^2$  保距, 自然  $\text{Aut } \mathbb{D}^2$  也保距.)

**问题 6.9** 证明在圆盘模型中  $z_1, z_2$  两点的距离  $d(z_1, z_2)$  满足

$$d(z_1, z_2) = \log \left( \frac{|z_1 - z_2| + |1 - z_1 \bar{z}_2|}{-|z_1 - z_2| + |1 - z_1 \bar{z}_2|} \right)$$

(提示: 不难发现,

$$\begin{aligned} \frac{\left| \frac{z_1+i}{iz_1+1} - \frac{z_2+i}{iz_2+1} \right|}{\left| \frac{z_1+i}{iz_1+1} - \frac{\bar{z}_2-i}{-i\bar{z}_2+1} \right|} &= \frac{|(z_1+i)(iz_2+1) - (z_2+i)(iz_1+1)|}{|(z_1+i)(-i\bar{z}_2+1) - (\bar{z}_2-i)(iz_1+1)|} \\ &= \frac{|z_1 - z_2|}{|1 - z_1\bar{z}_2|}, \end{aligned}$$

带入即可.)

**问题 6.10** 给出下面 *Schwarz-Pick* 引理的几何意义.

如果  $f: \mathbb{D}^2 \rightarrow \mathbb{D}^2$  是全纯映射,  $w = f(z)$ , 那么

$$\left| \frac{w_1 - w_2}{1 - w_1\bar{w}_2} \right| \leq \left| \frac{z_1 - z_2}{1 - z_1\bar{z}_2} \right|,$$

且

$$\frac{|dw|}{1 - |w|^2} \leq \frac{|dz|}{1 - |z|^2}.$$

(提示: 即双曲度量不减. 注意到  $\log \frac{1+x}{1-x}$  是单调的.)

**问题 6.11** 实际上更高维的

$$\mathbb{H}_{>0}^{2,1} = \{(x, y, z, t) : t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = 1\}.$$

也可以有“双曲极投影”映到  $\mathbb{D}^3$ , 并转化到上半平面  $\mathbb{H}^3$  上, 请问不用复分析是如何做到的? (提示: 我们在 (3.4) 解释过,  $\mathbb{D}^2$  和  $\mathbb{H}^2$  的双射不过通过球极投影变成球的转动. 如图6.12.)

**问题 6.12** 我们来看另一个经典的常曲率空间 **Beltrami 的伪球面 (pseudosphere)**, 考虑

$$(u, v) \mapsto \left( \frac{\cos u}{\cosh v}, \frac{\sin u}{\cosh v}, v - \tanh v \right).$$

其中  $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ . 这是 **曳物线 (tractrix)**  $(\frac{1}{\cosh t}, t - \tanh t)$  对应的旋转面, 如图6.13. 计算第一基本形式和 *Gauss* 曲率. (提示:  $I = \frac{du^2 + \sinh^2 v dv^2}{\cosh^2 v}$ , *Gauss* 曲率为  $-1$ .)

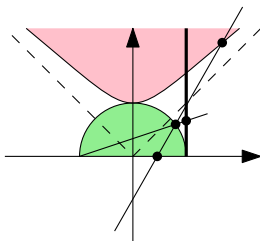


Figure 6.12: 双曲面与上半平面

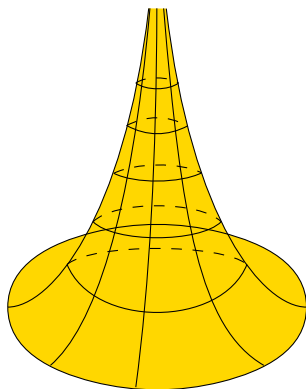


Figure 6.13: Beltrami 的伪球面

- (1) A.Hatcher. *Algebraic Topology*.
- (2) 龚昇. 简明复分析. S.Gong. *Concise complex analysis*.
- (3) John M. Lee. *An introduction to Riemannian Manifolds*

# Chapter 7

## 三维正交群 $SO_3$

下面我们终于要看到一个 Lie 群的例子. 定义特殊正交群

$$SO_n = SO(n) = \left\{ A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R}) : \begin{array}{l} AA^T = A^T A = 1 \\ \det A = 1 \end{array} \right\}.$$

其中  $\{*\}^T$  表示转置, 1 表示单位阵. 将实数换成复数, 转置改为共轭转置  $\{*\}^H$ , 可以得到特殊酉群

$$SU_n = SU(n) = \left\{ A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C}) : \begin{array}{l} AA^H = A^H A = 1 \\ \det A = 1 \end{array} \right\}.$$

不难发现,

$$SO_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} : \begin{array}{l} a, b \in \mathbb{R} \\ a^2 + b^2 = 1 \end{array} \right\} \cong_{\text{同胚}} \mathbb{S}^1.$$

但是  $SO_3$  就开始复杂起来. 另外, 出于一些后见之明, 我们还要顺带说明  $SU_2$ , 注意到

$$SU_2 = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix} : \begin{array}{l} \alpha, \beta \in \mathbb{C} \\ |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \end{array} \right\}.$$

分别取  $\alpha, \beta$  的实部虚部, 可以直接得到  $SU_2$  同胚于  $\mathbb{S}^3$ .

作为拓扑空间 首先, 熟知的线性代数结果是

- 实矩阵虚特征值总是成对出现.
- 奇数阶实矩阵必有实特征值.
- 正交矩阵特征值模长均为 1.

从而任意  $A \in \text{SO}_3$  都有属于特征值 1 的特征向量  $v$ , 再考虑与  $v$  垂直的平面  $V$ , 此时  $A$  限制在  $V$  上还是正交的, 这提供了一个“旋转角” $\theta$ . 反之, 给出  $v$  和  $\theta$ , 也对应到以  $v$  为旋转轴逆时针旋转  $\theta$  角的正交映射, 如图7.1.

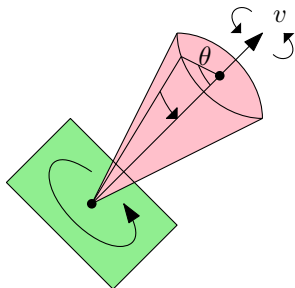


Figure 7.1: 以  $v$  为旋转轴逆时针旋转  $\theta$  角

注意到上面的旋转轴的选择在相差正数乘意义下一致, 从而可以选择单位长度, 角度在  $\text{mod } 2\pi$  意义下一致, 于是上面的过程确定了如下映射,

$$\begin{aligned} \varphi: \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1 &\longrightarrow \text{SO}_3 \\ (x, \theta) &\longmapsto (x \text{ 为旋转轴逆时针旋转 } \theta \text{ 角的正交映射}) \end{aligned}$$

其中我们认为  $\mathbb{S}^1 = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ . 根据上面的计算  $\varphi$  是满射, 但是  $\varphi$  不是单射, 还剩下如下两种情况要排除.

- 在  $\theta = 0$  时, 此时旋转轴是任意的, 因此  $\varphi(x, 0) = 1$ .
- 将旋转轴反向, 此时角度也反向, 因此  $\varphi(x, \theta) = \varphi(-x, -\theta)$ .

为此, 我们转而要求  $\theta \in [0, \pi]$ , 此时,

- 旋转角  $\theta = 0$ , 即恒等, 那么  $x$  的选择是任意的.
- 旋转角  $\theta = \pi$ , 即反射, 那么  $x$  的旋转轴的正反方向是任意的.

将  $S^2 \times [0, \pi]$  按照第一条粘合将得到  $\mathbb{D}^3$ , 其中圆心对应到被粘结的  $S^2 \times \{0\}$ , 而外表面对应着  $S^2 \times \{\pi\}$ , 如图7.2. 这时候再按照第二条要把  $S^2 \times \{\pi\}$  的对径点连接, 类似我们在第5章如图5.8看到的, 这将粘合出射影空间  $\mathbb{P}^3$ .

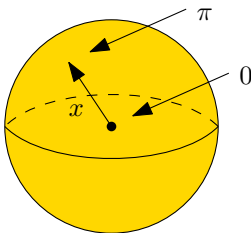


Figure 7.2: 粘结  $S^2 \times [0, \pi]$

因此拓扑同伦同调的信息可以根据  $\mathbb{P}^3$  的信息得到. 但是  $SO_3$  作为一些矩阵组成的拓扑空间, 还有其他更多的理解方式.

注意到  $S^3 \rightarrow \mathbb{P}^3$  是覆叠映射, 于是基本群  $\pi_1(SO_3, 1) = \pi_1(\mathbb{P}^3, *) = \{\pm 1\}$ . 那么  $-1$  对应的“回路”, 根据  $\mathbb{P}^3$  基本群代表元的选取, 无非是“一点绕到对径粘结的另一边”的道路. 为了能够看到  $SO_3$  中对应的道路, 我们需要回溯到原本的粘结“中间态”上来, 如图7.2. 假设对径点对应到  $(x, \pi) \in S^2 \times \{\pi\}$ , 不妨选取“直径”作为道路连接对径点, 不难发现这条道路正是

$$[-1, 1] \ni t \mapsto \left( \begin{array}{l} \text{以 } x \text{ 为旋转轴} \\ \text{以 } \pi t \text{ 为角度的旋转} \end{array} \right) \in SO_3$$

将其迁移到单位元上, 这个道路是

$$[0, 1] \ni t \mapsto \left( \begin{array}{l} \text{以 } x \text{ 为旋转轴} \\ \text{以 } 2\pi t \text{ 为角度的旋转} \end{array} \right) \in SO_3$$

这就是“以  $x$  为旋转轴匀角速度转到  $2\pi$ ”这一“动作”, 即“转一圈”.

为了能够看到“转两圈等于没转”以及“转一圈不等于没转”这件事，我们将  $SO_3$  作用在  $S^2$  上. 如果有回路  $[0, 1] \xrightarrow{p} SO_3$ , 任意  $x \in S^2$ , 都可以得到

$$p' : [0, 1] \longrightarrow \{(x, y, z) : 1 \leq \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \leq 2\} \quad t \longmapsto (1+t) \cdot (p(t) \cdot x).$$

这是连接  $x \in S^2$  和  $2x \in 2S^2$  的一条连线, 那么“转两圈等于没转”以及“转一圈不等于没转”就可用图7.3和图7.4解释. 这里为了显示“整体性”, 是使用“纸带”相连的.

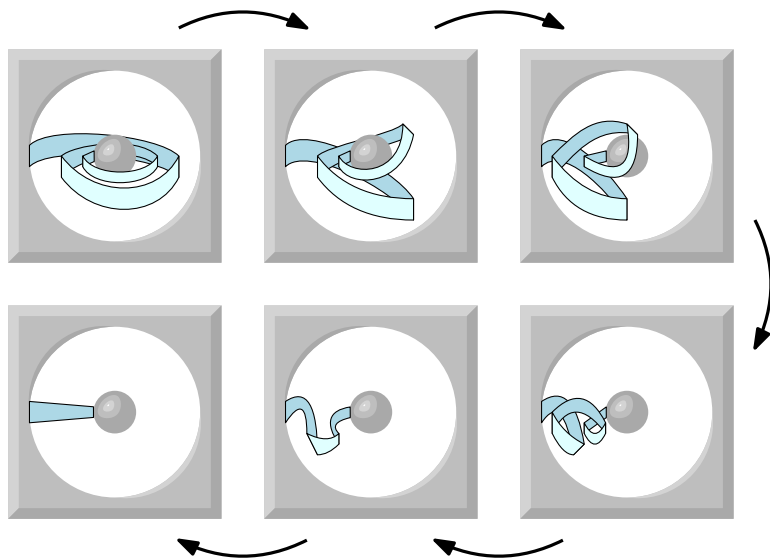


Figure 7.3: 转两圈等于没转

另一种解释是用手托住物体旋转, 会发现转  $2\pi$ , 手会扭向外侧, 但是再转  $2\pi$  就会回到原本的样子, 如图7.5.

而类比到  $\pi_1(SO_2, 1) = \pi_1(S^1, *) = \mathbb{Z}$ , 这被解释成“旋转几周也没法解开”, 如图7.6.

考虑球面上的单位切向量丛, 如图7.7, 嵌入到  $\mathbb{R}^3$  中, 即

$$\{(x, y) : x \in S^2, x \perp y, \|y\| = 1\}.$$

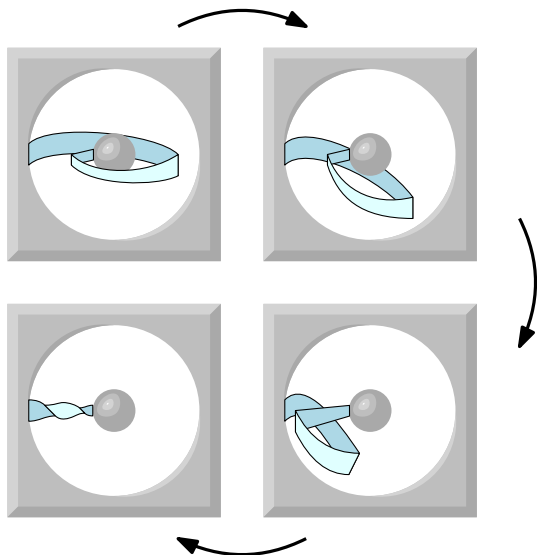


Figure 7.4: 转一圈不等于没转

不难发现这同胚于  $SO_3$ , 具体来说,  $x, y$  可作为  $SO_3$  的前两列, 最后一列可由三维空间的向量积  $x \wedge y$  决定. 这表明  $SO_3$  是以  $S^2$  为底空间,  $S^1$  为纤维的纤维丛, 于是利用纤维的长正合列, 我们会得到或许令人震惊的结果.

**定理 7.1 (Hopf)** 球面  $S^2$  的第三个同伦群非平凡, 具体来说

$$\pi_3(S^2, 1) = \mathbb{Z}.$$

**证明** 因为道路连通性, 下面省去基点. 有纤维是  $SO_2 \rightarrow SO_3 \rightarrow S^2$ , 换成我们熟知的拓扑空间变成  $S^1 \rightarrow \mathbb{P}^3 \rightarrow S^2$ , 利用纤维的长正合列得到

$$\underbrace{\pi_3(S^1)}_{=0} \rightarrow \pi_3(\mathbb{P}^3) \rightarrow \pi_3(S^2) \rightarrow \underbrace{\pi_2(S^1)}_{=0}$$

因为  $S^3 \rightarrow \mathbb{P}^3$  是覆叠映射, 于是  $\pi_3(\mathbb{P}^3) = \pi_3(S^3) = \mathbb{Z}$ , 从而命题得证. □

**覆叠映射** 经典的结果是存在正合列

$$0 \rightarrow \{\pm 1\} \rightarrow SU_2 \xrightarrow{\pi} SO_3 \rightarrow 1,$$



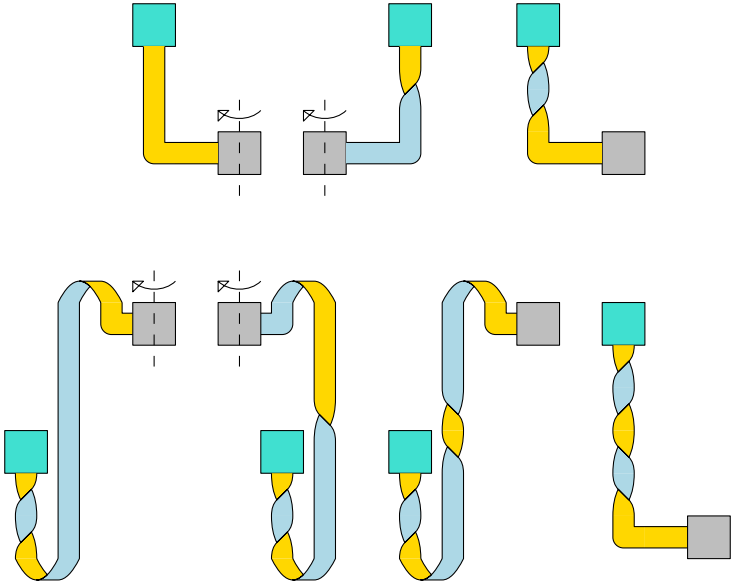


Figure 7.5: 用手拿着物品转  $4\pi$ , 手不会扭起来

这是一个覆叠映射, 这也映照了上面  $SO_3$  同胚于射影平面,  $SU_2$  同胚于  $S^3$  的事实.

一个直接的构造是利用球极投影, 我们要找 Möbius 变换中等距作用在  $S^1$  上的元素. 对于  $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in GL_n(\mathbb{C})$ , 计算第一基本形式的变化

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{S}^2 \\
 A \downarrow & & \downarrow \\
 \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{S}^2
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{ccc}
 \frac{4}{(|Az|^2+1)^2} \frac{|\det A|^2}{|\gamma z+d|^4} (dx^2 + dy^2) & \longleftarrow & * \\
 \uparrow & & \uparrow \\
 \frac{4}{(|z|^2+1)^2} (dx^2 + dy^2) & \longleftarrow & *
 \end{array}$$

想要等距就要求

$$\frac{4}{(|Az|^2 + 1)^2} \frac{|\det A|^2}{|\gamma z + d|^4} = \frac{4}{(|z|^2 + 1)^2}$$

如果取定  $\det A = 1$ , 那么要解  $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ , 且

$$|z|^2 + 1 = |\alpha z + \beta|^2 + |\gamma z + \delta|^2.$$



Figure 7.6: 旋转几周也没法解开

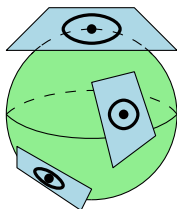


Figure 7.7: 球面上的单位切向量丛

换句话说, 如果在  $\mathbb{C}^2$  选择标准酉内积,  $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in \mathrm{SU}(2)$ . 又因为所有保向保距的  $\mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$  均来自  $\mathrm{SO}_3$ , 从而我们得到了  $\mathrm{SU}_2 \xrightarrow{\pi} \mathrm{SO}_3$ . 由于保距保向必定全纯, 故实际上是满射, 且不难验证  $\ker \pi = \{\pm 1\}$ . 但是这样会陷入初等三角学的泥潭, 和下面我们的构造还差一个自同构.

经典的构造来自于计算  $\mathrm{SU}_2$  的 Lie 代数的伴随表示. 作为典型群,  $\mathrm{SU}_2$  的 Lie 代数可以通过矩阵的指数映射计算, 注意到

$$\exp A \in \mathrm{SU}(2) \iff \begin{cases} \exp A \exp A^H = 1, \\ \det \exp A = 1. \end{cases} \iff \begin{cases} \exp(-A) = \exp A^H, \\ \exp(\mathrm{tr} A) = 1. \end{cases}$$

于是  $\mathrm{SU}(2)$  的 Lie 代数

$$\mathfrak{su}_2 = \left\{ A \in \mathfrak{gl}_2(\mathbb{C}) : \begin{array}{l} A + A^H = 0 \\ \mathrm{tr} A = 0 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} xi & y+zi \\ -y+zi & -xi \end{pmatrix} : x, y, z \in \mathbb{R} \right\}.$$

不难验证, 或者根据伴随表示的定义, 任意  $U \in \mathrm{SU}_2$  作用在  $\mathfrak{su}_2$  上通过

$$\text{共轭}_U : \mathfrak{su}_2 \longrightarrow \mathfrak{su}_2 \quad U \longmapsto UXU^{-1}.$$

注意到,

- 行列式正是“模长”, 具体来说  $\det \begin{pmatrix} xi & y+zi \\ -y+zi & -xi \end{pmatrix} = x^2 + y^2 + z^2$ . 而显然  $SU_2$  的作用保持行列式.
- 从而通过将  $(x, y, z)$  等同作  $\begin{pmatrix} xi & y+zi \\ -y+zi & -xi \end{pmatrix}$ , 这定义了同态

$$\pi : SU_2 \longrightarrow SO_3 \quad U \longmapsto [X \mapsto UXU^{-1}]$$

- 计算  $\ker \pi$ ,

$$\begin{aligned} U = \text{id} &\iff \forall X \in \mathfrak{su}_2, UX = XU \\ &\iff \forall X \in \mathfrak{su}_2, U \exp X = \exp XU \\ &\iff \forall X \in SU_2, UX = XU \\ &\iff U \text{ 在 } SU_2 \text{ 中心} \\ &\iff U = \pm 1. \end{aligned}$$

- 要证明  $\pi$  是满射, 只需要验证单位元处的切映射满秩即可, 也就是计算  $\pi$  对应的 Lie 代数同态. 注意到

$$\mathfrak{so}_3 = \left\{ A \in \mathfrak{gl}_3(\mathbb{R}) : \begin{array}{l} A + A^T = 0 \\ \text{tr } A = 0 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x & -x-y & z \\ y & z & -z \end{pmatrix} : x, y, z \in \mathbb{R} \right\}$$

不难发现, 在  $SO_3$  上, 几个“典型元素”作用在  $(x_0, y_0, z_0)$  分别为

$$\begin{aligned} \exp \begin{pmatrix} t & -t \\ & 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \quad (x_1, y_1, z_0) \quad e^{it}(x_0 + y_0i) = x_1 + y_1i, \\ \exp \begin{pmatrix} t & 1 \\ & -t \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos t & 1 \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \quad (x_2, y_0, z_2) \quad e^{it}(x_0 + z_0i) = x_2 + z_2i, \\ \exp \begin{pmatrix} 1 & \\ & t \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \quad (x_0, y_1, z_1) \quad e^{it}(y_0 + z_0i) = y_3 + z_3i. \end{aligned}$$

在  $SU_2$  上, 几个“典型元素”作用在  $\begin{pmatrix} x_0i & y_0+z_0i \\ -y_0+z_0i & -x_0i \end{pmatrix}$  分别为

$$\begin{aligned} \exp \begin{pmatrix} xi & \\ & -xi \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} e^{ix} & \\ & e^{-ix} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} x_0i & y_1+z_1i \\ -y_1+z_1i & -x_0i \end{pmatrix} \quad e^{i2x}(y_0 + z_0i) = y_1 + z_1i, \\ \exp \begin{pmatrix} & y \\ -y & \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos y & \sin y \\ -\sin y & \cos y \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} x_2i & y_0+z_2i \\ -y_0+z_2i & -x_2i \end{pmatrix} \quad e^{i2y}(x_0 + z_0i) = x_2 + z_2i, \\ \exp \begin{pmatrix} & zi \\ zi & \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos z & i \sin z \\ i \sin z & \cos z \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} x_3i & y_3+z_3i \\ -y_3+z_3i & -x_3i \end{pmatrix} \quad e^{i2z}(x_0 + z_0i) = x_3 + y_3i. \end{aligned}$$

从而  $\pi : SU_2 \rightarrow SO_3$  诱导的 Lie 代数同态  $\mathfrak{su}_2 \rightarrow \mathfrak{so}_3$  满足

$$\begin{pmatrix} i & \\ & -i \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & \\ & -2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} & 1 \\ -1 & \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} i & \\ & \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ & 1 \end{pmatrix}.$$

就是对应的 Lie 代数同态. 不难发现这是同构的 Lie 代数.

当然, 为人所津津乐道的是, 四元数可以表示三维空间的旋转, 这将在习题 7.9 解释.

**紧 Lie 群的表示** 下面我们要简单说一下  $SO_3$  的表示. 标准的方法是任何  $SO_3$  的表示  $SO_3 \rightarrow GL(V)$  都可以复合上  $SU_2 \rightarrow SO_3$ , 变成  $SU_2$  的表示  $SU_2 \rightarrow GL(V)$ .

考虑全体二元  $n$  次齐次多项式  $\mathbb{C}[z, w]_n$ ,  $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$  通过

$$\begin{aligned} A : \mathbb{C}[z, w]_n &\longrightarrow \mathbb{C}[z, w]_n \\ f(z, w) &\longmapsto f(\alpha z + \gamma w, \beta z + \delta w) \end{aligned}$$

我们要说明这是不可约的, 当然, 我们会使用 **Schur 引理**.

**定理 7.2** 上述构造  $SU_2$  的表示  $\mathbb{C}[z, w]_n$  是不可约的.

**证明** 根据 Schur 引理, 只需论证到自身的  $SU_2$  同态是数乘即可. 假设有同态  $\mathbb{C}[z, w]_n \xrightarrow{\varphi} \mathbb{C}[z, w]_n$ . 考虑某个单位圆周上的  $a$ , 则  $\begin{pmatrix} a & \\ & 1/a \end{pmatrix} \in SU_2$ , 这要求,

$$\begin{pmatrix} a & \\ & 1/a \end{pmatrix} \varphi(z^k w^{n-k}) = a^{2k-n} \varphi(z^k w^{n-k}).$$

这个非齐次的现象将导致对每个  $k$ ,  $\varphi(z^k w^{n-k}) = c_k z^k w^{n-k}$  对某个  $c_k$ , 具体来说, 只需要取  $a$  使得  $a^1, a^2, \dots$  互不相同. 这时再考虑旋转  $\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \in SU_2$ , 这要求

$$\begin{aligned} \varphi[(\cos \theta z + \sin \theta w)^n] &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \varphi[\cos^k \theta \sin^{n-k} \theta z^k w^{n-k}] \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} c_k \cos^k \theta \sin^{n-k} \theta z^k w^{n-k} \\ \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \varphi(z^n) &= c_n (\cos \theta z + \sin \theta w)^n \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} c_n \cos^k \theta \sin^{n-k} \theta z^k w^{n-k}. \end{aligned}$$

这说明系数  $c_k = c_n$ . □

下面我们要说明  $\mathbb{C}[z, w]_n$  是全部的不可约表示. 这时需要特征理论, 然而完整的特征需要给出  $SU_2$  的参数化, 这是复杂的. 因此我们放在极大环面上看. 考虑

$$e(t) = \begin{pmatrix} e^{it} & \\ & e^{-it} \end{pmatrix} \in SU_2 \quad \mathbb{T}_{SU_2} = \{e(t) : t \in \mathbb{R}\}$$

他们是  $SU_2$  中所有的对角元素, 且  $e$  的像他们同胚于  $S^1$ . 注意,  $e(t)$  和  $e(s)$  共轭当且仅当  $t \equiv \pm s \pmod{2\pi}$ .

对于一个类函数  $\chi$ , 即对任意  $x, y \in SU_2$  都有  $\chi(x) = \chi(yxy^{-1})$  的函数  $SU_2 \xrightarrow{\chi} \mathbb{C}$ , 出于表示论的需要, 我们迫切地希望求得  $\int_{SU_2} f(g) dg$ .

注意到,

- 任何一个酉矩阵都酉相似到对角矩阵.
- 且经过适当调整, 过渡矩阵可取在  $SU_2$  中.
- 因为  $e(t)$  和  $e(-t)$  共轭,  $SU_2$  的任意元素可在  $SU_2$  中共轭到某个  $e(t)$ , 而且  $t \in [0, \pi]$ .

因此类函数  $\chi$  所有的“取值”都蕴含在  $\{e(t) : t \in [0, \pi]\}$  的取值之中了, 所以欲求的积分不过和在  $\mathbb{T}_{SU_2}$  相差一个“重数”, 即存在某个  $g(t)$  使得

$$\int_{SU_2} f(g) dg = \int_0^\pi f(e(t)) g(t) dt$$

为了求出这个  $g(t)$ , 我们计算上面  $\mathbb{C}[z, w]_n$  的特征, 注意到  $e(t)z^k w^{n-k} = e^{i(2k-n)t} z^k w^{n-k}$ , 因此其特征

$$\chi_n(e(t)) = \sum_{k=0}^n e^{i(2k-n)t}$$

如果  $t \notin \pi\mathbb{Z}$ , 有  $\chi_n(e(t)) = \frac{\sin(n+1)t}{\sin t}$ . 按照要求有

$$\int_{SU_2} \chi_n(g) \overline{\chi_m(g)} dg = \begin{cases} 1, & m = n, \\ 0, & m \neq n. \end{cases}$$

即

$$\int_0^\pi \frac{\sin(n+1)t \cdot \sin(m+1)t}{\sin^2 t} g(t) dt = \begin{cases} 1, & m = n, \\ 0, & m \neq n. \end{cases}$$

因为  $\chi_n(e(t)) = \cos nt + \chi_{n-1}(e(t)) \cos t$ , 从而  $\{\chi_n(e(t))\}$  张成的空间稠密, 从而  $g(t)$  的选择是唯一的. 而显然的观察表明  $g(t)$  应该取作  $\frac{2}{\pi} \sin^2 t$ , 因此我们得到了如下公式

$$\int_{SU_2} f(g) dg = \frac{2}{\pi} \int_0^{2\pi} f(e(t)) \sin^2 t dt$$

利用这个公式我们可以得到  $\mathbb{C}[z, w]_n$  是全部的不可约表示.

**定理 7.3** 上述构造  $SU_2$  的表示  $\{\mathbb{C}[z, w]_n\}_{n \geq 0}$  是全体不可约复表示的.

**证明** 假如类函数  $\chi$  对所有  $n$  都有  $\langle \chi, \chi_n \rangle = 0$ , 即

$$0 = \int_{SU_2} \chi(g) \overline{\chi_n(g)} dg = \frac{2}{\pi} \int_0^{2\pi} \chi(e(t)) \overline{\chi_n(e(t))} \sin^2 t dt.$$

这表明  $\chi(e(t)) = 0$ , 因为是类函数, 所以  $\chi = 0$ . 这就找到了全体不可约复表示.  $\square$

下面我们需要回到  $SO_3$ . 考虑  $SU_2 \xrightarrow{\pi} SO_3$ , 问题在于怎样的  $SU_2$  的表示可以提升为  $SO_3$ . 因为  $\ker \pi = \{\pm 1\}$ , 因此只需要  $-1$  的作用是平凡的. 不难发现

$$-1 \cdot z^k w^{n-k} = (-z)^k (-w)^{n-k} = (-1)^n z^k w^{n-k}.$$

因此  $\{\mathbb{C}[z, w]_n\}_{n \geq 0}$  中能够提升为  $SO_3$  表示的为  $\{\mathbb{C}[z, w]_{2k}\}_{k \geq 0}$ . 这给出了所有的  $SO_3$  的不可约表示.

但是, 为了能够更具体地把握, 考虑所有三元齐  $n$  次调和多项式

$$\text{Harm}\mathbb{C}[x, y, z]_n = \{n \text{ 次齐次多项式 } f \in \mathbb{C}[x, y, z] : \Delta f = 0\}.$$

其中  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$  是 Laplace 算子. 不难类似定义  $A \in SO_3$  在其上的作用

$$\begin{aligned} A : \text{Harm}\mathbb{C}[x, y, z]_n &\longrightarrow \text{Harm}\mathbb{C}[x, y, z]_n & (x', y', z') &= (x, y, z)A \\ f(x, y, z) &\longmapsto f(x', y', z') \end{aligned}$$

这是良定义的, 因为任意  $A \in GL_3(\mathbb{R})$ , 作为线性映射  $(x, y, z) \mapsto (x', y', z') = (x, y, z)A$ , 根据链式法则  $\nabla' = \left( \frac{\partial}{\partial x'}, \frac{\partial}{\partial y'}, \frac{\partial}{\partial z'} \right) = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) A = \nabla \cdot A$ , 因此对于  $A \in SO_3$ ,  $\Delta' = \nabla' \nabla'^T = \nabla \cdot A A^T \cdot \nabla^T = \Delta$ .

考虑上面  $SU_2$  中考虑的  $e(t) = \begin{pmatrix} e^{it} & \\ & e^{-it} \end{pmatrix}$ , 这根据上文对应到  $R(2t) := \begin{pmatrix} \cos 2t & -\sin 2t \\ \sin 2t & \cos 2t \end{pmatrix}$ . 考虑调和函数  $(x_2 + x_3 i)^n$ , 此时  $R(t)$  的作用是

$$R(t)[(x_2 + x_3 i)^n] = e^{int}(x_2 + x_3 i)^n.$$

注意  $e(t)$  在  $\mathbb{C}[z, w]_m$  上全体特征值为  $\{e^{i(2k-m)t}\}_{k=0}^n$ , 而  $R(2t)$  已经有特征值  $e^{in2t}$ , 从而  $\text{Harm}\mathbb{C}[x, y, z]_n$  必然含有某个  $\mathbb{C}[z, w]_m$  作为直和项, 且  $m \geq 2n$ .

**引理 7.4** 三元齐  $n$  次调和多项式的维数为  $2n + 1$ , 即

$$\dim \text{Harm}\mathbb{C}[x, y, z]_n = 2n + 1.$$

**证明** 将任意三元齐  $n$  次多项式  $f(x, y, z)$  用 Taylor 展开写作

$$\sum_{k=0}^n \frac{z^k}{k!} f_k(x, y),$$

其中  $f_k$  是二元齐  $n - k$  次多项式. 于是  $\Delta f = 0$  即

$$f_{k+2} + \Delta f_k = 0,$$

其中  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$  是二维的 Laplace 算子. 于是调和多项式由  $f_0$  和  $f_1$  决定, 从而  $\dim \text{Harm}\mathbb{C}[x, y, z]_n = ((n - 0) + 1) + ((n - 1) + 1) = 2n + 1$ .  $\square$

**推论 7.5** 上述构造  $SO_3$  的表示  $\{\text{Harm}\mathbb{C}[x, y, z]_n\}_{n \geq 0}$  是全体不可约复表示的.

**证明** 首先,  $\text{Harm}\mathbb{C}[x, y, z]_n$  必然含有某个  $\mathbb{C}[z, w]_m$  作为直和项, 且  $m \geq 2n$ . 即

$$\underbrace{\mathbb{C}[z, w]_m}_{2n+1 \leq \dim = m+1} \subseteq \underbrace{\text{Harm}\mathbb{C}[x, y, z]_n}_{\dim = 2n+1}.$$

于是  $m = 2n$ , 且  $\mathbb{C}[z, w]_{2n} \cong \text{Harm}\mathbb{C}[x, y, z]_n$   $\square$

最后, 不难发现, 本节处理  $SO_3$  的方法几乎完全不可能直接照搬到一般的  $SO_n$  上. 因为

- 首先, 对于一般的  $A \in SO_n$ , 未必是绕某一个旋转轴的旋转.

- 其次, 对于一般的  $SO_n$  也不再能看做球面的单位法向量从.
- 最后, 一般更没有覆叠映射  $SU_n \rightarrow SO_n$ .

对于前两点, 我们可以通过通过  $A \mapsto \begin{pmatrix} 1 & \\ & A \end{pmatrix}$ , 认为  $SO_{n-1} \subseteq SO_n$ , 且左陪集空间

$$so_{n-1} \backslash SO_n \cong_{\text{同胚}} \mathbb{S}^n.$$

因为坐标是那些  $\mathbb{R}^n$  中的正向的基  $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ , 且如果  $u_2, \dots, u_n$  的选取在相差  $SO_{n-1}$  意义下相同, 那么就相同 — 这和直接选  $u_1$  没有差别. 实际上, 利用 **Gram-Schmit 正交化** 过程可得这是一条纤维. 于是利用纤维的长正合列, 我们依旧可以返回  $SO_n$  的同伦信息, 特别地  $n \geq 3$  时,  $\pi_1(SO_n, 1) = \{\pm 1\}$ .

对于后一点, 基本的想法来自复数表征旋转的想法, 我们可以将所有方向的“虚数单位  $i$ ”挑拣出来, 即那些反射的平方根. 当然, 这当中牵扯 Clifford 代数. 不论如何, 结论是有 **旋子 (spinor) 群**  $Spin_n$  存在满射  $Spin_n \xrightarrow{\pi} SO_n$ , 且核是  $\{\pm 1\}$ . 于是, 利用基本群与覆叠空间的关系知道  $Spin_n$  是单连通的, 这当然是 Lie 群的万有覆叠空间的一例.

**问题 7.6** 从 (7.5) 证明已经可以看出一些  $SU_2$  中“权”的意味. 方便起见, 记  $V_n = \mathbb{C}[z, w]_n$ , 我们会继续使用文中的  $e(t) = \begin{pmatrix} e^{it} & \\ & e^{-it} \end{pmatrix}$ . 证明: 对于  $SU_2$  的表示  $V$ ,

$$V = \bigoplus k_n V_n \iff e(t) \text{ 属于 } e^{imt} \text{ 的特征值的重数为 } \sum_{\substack{-m \leq n \leq m \\ m-n \in 2\mathbb{Z}}} k_n.$$

可以用图 7.8 表示

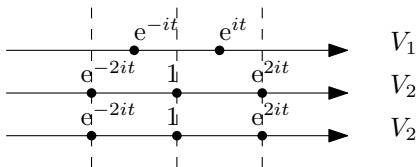


Figure 7.8:  $SU_2$  表示的权



并利用这条性质证明 **Clebsch-Gordan 公式**

$$V_k \otimes V_h \cong \bigoplus_{i=0}^{\min(k,h)} V_{k+h-2i}.$$

这可以用图 7.9 解释. (提示: 当然, 容易知道  $A \otimes B$  作用在  $V \otimes W$  上的特征值是特征值直接相乘. 于是变成需要验证的组合恒等式, 当然, 恒等式可以如图 7.10 验证. 当然直接验证特征也可.)

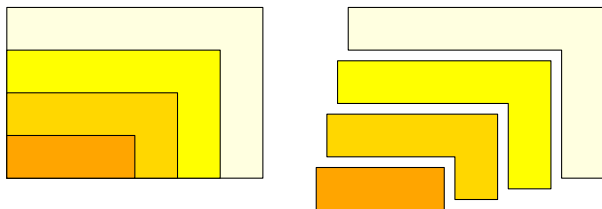


Figure 7.9: Clebsch-Gordan 公式

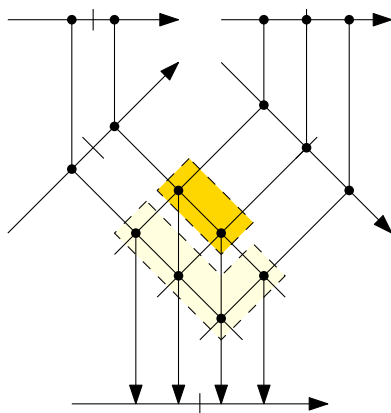


Figure 7.10: Clebsch-Gordan 公式

**问题 7.7 (四元数)** 下面我们构造 **Hamilton 四元数**. 证明下列定义是等价的

(1)  $\mathbb{H} = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} : \alpha, \beta \in \mathbb{C} \right\}$ , 其中加法和乘法继承自矩阵.

(2)  $\mathbb{H} = \left\{ \begin{pmatrix} x & y & z & w \\ -y & x & -w & z \\ -z & w & x & -y \\ -w & -z & y & x \end{pmatrix} : x, y, z, w \in \mathbb{R} \right\}$ , 其中加法和乘法继承自矩阵.

(3) 记  $\mathbb{R}$ -线性空间  $\mathbb{H} = \mathbb{R} \oplus i\mathbb{R} \oplus j\mathbb{R} \oplus k\mathbb{R}$ , 定义乘法满足

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1, \quad ij = -ji = k, \quad jk = -kj = i, \quad ki = -ik = j.$$

(4) 记  $\mathbb{C}$ -线性空间  $\mathbb{H} = \mathbb{C} \oplus j\mathbb{C}$ , 定义乘法满足

$$j^2 = -1, \quad zj = j\bar{z}.$$

并证明  $\mathbb{H}$  是除环. (提示: 第一个等价来自于复数理解为旋转带来的群同态  $x + yi \mapsto \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}$ . 后一个等价来自于按照下列方法挑选基,

$$1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad i = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad j = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad k = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

则任何  $\mathbb{H}$  中的元素都可以写成  $x + yi + zj + wk$ . 是除环的论证则来自直接计算  $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{|\alpha|^2 + |\beta|^2} \begin{pmatrix} \bar{\alpha} & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \in \mathbb{H}$ , 得到  $\mathbb{H}$  是除环.)

还可以定义共轭  $\bar{*}$ , 使得  $\overline{x + yi + zj + wk} = x - yi - zj - wk$ , 且满足

$$\omega \cdot \bar{\omega} \in \mathbb{R} \quad \bar{\omega} \cdot \bar{\beta} = \overline{\beta \cdot \omega}.$$

(提示: 这实际上对应到矩阵的共轭转置.)

问题 7.8 (紧致辛群) 于是可以定义“四元数”的“酉”群,

$$U_n = \{A \in M_n(\mathbb{H}) : AA^H = A^H A = 1\}.$$

其中  $\{*\}^H$  表示共轭转置. 证明这和紧致辛群 (compact Symplectic group) 是同构的

$$Sp_n = \left\{ A \in GL_{2n}(\mathbb{C}) : \begin{array}{l} A \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ & 1 \end{pmatrix} A^T = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ & 1 \end{pmatrix} \\ AA^H = A^H A = 1 \end{array} \right\}.$$

其中  $1$  是  $n$  阶单位阵. (提示: 注意到

$$\mathbb{H} = \{A \in M_2(\mathbb{C}) : A \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ & 1 \end{pmatrix} \bar{A}\}.$$

这里  $\bar{*}$  表示共轭. 从而带入上面的四元数  $\alpha + j\beta \mapsto \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix}$ . 并注意在  $AA^H = A^H A = 1$  前提下,  $(A^T)^{-1} = \bar{A}$ .)

**问题 7.9** 特别地, 验证四元数的“单位圆” $\mathbf{U}_1 \cong \mathrm{Sp}_1$  同构于  $\mathrm{SU}_2$ . 且有如下旋转的对应

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbf{U}_1 & \mathrm{SU}_2 & \mathrm{SO}_3 \\
 \cos \theta + \sin \theta i & \begin{pmatrix} \cos \theta + \sin \theta i & \\ & \cos \theta - \sin \theta i \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & \cos 2\theta - \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & \cos \theta \end{pmatrix} \\
 \cos \theta + \sin \theta j & \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \cos 2\theta & -\sin 2\theta \\ \sin 2\theta & 1 & \cos \theta \end{pmatrix} \\
 \cos \theta + \sin \theta k & \begin{pmatrix} \cos \theta & i \sin \theta i \\ i \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \cos 2\theta & -\sin 2\theta \\ \sin 2\theta & \cos \theta & 1 \end{pmatrix}
 \end{array}$$

记四元数的纯虚数  $\Im\mathbb{H} = \{xi + yj + zk : x, y, z \in \mathbb{R}\}$ , 有对应

$$xi + yj + zk \leftrightarrow \begin{pmatrix} xi & y+zi \\ -y+zi & -ix \end{pmatrix} \leftrightarrow (x, y, z)^T.$$

通过上述映射有如下交换图

$$\begin{array}{ccccc}
 \Im\mathbb{H} & \longrightarrow & \mathfrak{su}_2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\
 \downarrow X \mapsto AXA^{-1} & & \downarrow Y \mapsto AY A^{-1} & & \downarrow Z \mapsto CZ \\
 \Im\mathbb{H} & \longrightarrow & \mathfrak{su}_2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3
 \end{array}$$

其中

$$A \in \mathrm{Sp}_1 \leftrightarrow B \in \mathrm{SU}_2 \leftrightarrow C \in \mathrm{SO}_3.$$

这也就是所谓的“四元数”可以借以表示三维空间乘法的数学含义.

[1] Theodor Bröcker & Tammo tom Dieck. *Representations of Compact Lie Groups*.

[2] Brian C. Hall. *Lie Groups, Lie Algebras, and Representations. An Elementary Introduction*.

[3] Glen E. Bredon. *Topology and Geometry*.

# List of Figures

1.1	平面去掉有限个点不影响道路连通性 . . . . .	2
1.2	球极投影 . . . . .	3
1.3	场 $\Theta = \frac{1}{x^2+y^2}(-y, x)$ , 连同线素/积分曲线 . . . . .	5
1.4	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$ . . . . .	6
1.5	旋转指数是 $-1, 1, 2, 0$ . . . . .	7
1.6	复可导 . . . . .	8
1.7	幅角原理 . . . . .	10
1.8	幅角原理 . . . . .	10
1.9	复平面的指数映射 . . . . .	13
1.10	内部与外部 . . . . .	14
2.1	单位化映射 . . . . .	16
2.2	指数映射 . . . . .	17
2.3	道路提升 . . . . .	17
2.4	$\mathbb{S}^1$ 上的处处不为零的切向量场和 $\mathbb{S}^2$ 上失败的尝试 . . . . .	19
2.5	有无限个两解 . . . . .	21
2.6	有理点等价于斜率有理 . . . . .	22
2.7	收费站 . . . . .	23
2.8	临界点的情形 . . . . .	23
2.9	二元自由群的无限自由子群 . . . . .	25
2.10	牵引引理 . . . . .	26

2.11 一个在 $S^2$ 内自由扭动的回路	27
3.1 用 van Kampen 定理证明球面基本群平凡	29
3.2 球面的测地线	31
3.3 球极投影	32
3.4 球极投影保角	33
3.5 球极投影	34
3.6 圆盘到上半平面的映射	36
3.7 圆盘到上半平面的映射	37
3.8 Blaschke 变换	37
3.9 球面三角形	39
3.10 Pascal 定理	43
4.1 轮胎面	44
4.2 小的 $S^1$ “绕着”大的 $S^1$ 旋转一圈	44
4.3 粘出轮胎	45
4.4 $S^1 \times \mathbb{R}^2$	45
4.5 $T^2$ 的结构	46
4.6 $T^2$ 的万有覆叠	46
4.7 轮胎面上的两个洞	49
4.8 轮胎面的坐标卡	50
4.9 轮胎纹	50
4.10 鞍点和极值点	52
4.11 更多洞的轮胎面	52
4.12 平移	54
4.13 椭圆曲线	56
4.14 粘出轮胎	58
4.15 爆胎了	58
5.1 $\mathbb{P}^1$ 同胚于 $S^1$	61
5.2 $\mathbb{P}^2$ 示意图	62
5.3 Desargues 定理	64

5.4	$\mathbb{P}\Gamma_f$ 的锥形 . . . . .	66
5.5	Cayley-Bacharach 定理 . . . . .	66
5.6	球面对径点的粘合 . . . . .	67
5.7	上半球面对径点粘合 . . . . .	67
5.8	圆周对径点粘合 . . . . .	68
5.9	圆盘边界的对径点粘合 . . . . .	68
5.10	射影平面不可定向 . . . . .	68
5.11	圆盘的边界粘上 Möbius 的边界 . . . . .	70
5.12	圆盘的边界粘上 Möbius 的边界 . . . . .	71
5.13	Pascal 定理的对偶版本 . . . . .	73
5.14	笼子定理 . . . . .	74
5.15	Pascal 定理 . . . . .	75
5.16	椭圆曲线的加法 . . . . .	75
6.1	闭上半平面 $\mathbb{H}^2$ 与平面 $\mathbb{R}^2$ 不同胚 . . . . .	77
6.2	方向可递 . . . . .	80
6.3	双曲极投影 . . . . .	82
6.4	双曲极投影 . . . . .	82
6.5	$\mathbb{H}_{>0}^{1,1}$ 上的测地线 . . . . .	85
6.6	圆盘上的测地线 . . . . .	87
6.7	测地线组成的三角形 . . . . .	87
6.8	边长无限但是面积有限的三角形 . . . . .	88
6.9	球心投影 . . . . .	88
6.10	双曲投影 . . . . .	89
6.11	Beltrami-Klein 圆盘上的测地线 . . . . .	89
6.12	双曲面与上半平面 . . . . .	91
6.13	Beltrami 的伪球面 . . . . .	91
7.1	以 $v$ 为旋转轴逆时针旋转 $\theta$ 角 . . . . .	93
7.2	粘结 $\mathbb{S}^2 \times [0, \pi]$ . . . . .	94
7.3	转两圈等于没转 . . . . .	95
7.4	转一圈不等于没转 . . . . .	96

7.5	用手拿着物品转 $4\pi$ , 手不会扭起来 . . . . .	97
7.6	旋转几周也没法解开 . . . . .	98
7.7	球面上的单位切向量丛 . . . . .	98
7.8	$SU_2$ 表示的权 . . . . .	104
7.9	Clebsch-Gordan 公式 . . . . .	105
7.10	Clebsch-Gordan 公式 . . . . .	105

# Index

- Alexander 对偶, 69
- Beltrami-Klein 圆盘, 88
- Beltrami 的伪球面, 91
- Blaschke 变换, 35
- Borsuk-Ulam 定理, 26
- Brouwer 不动点定理, 12
- Cauchy-Riemann 方程, 8
- Cayley-Bacharach 定理, 66
- Clebsch-Gordan 公式, 105
- de Rham 上同调, 6
- Gauss-Bonnet 定理, 38, 86
- Gram-Schmit 正交化, 104
- Hamiton 四元数, 105
- Hilbert 零点定理, 21
- Hopf 定理, 30
- Hurewicz 定理, 69
- Kronecker 定理, 51
- Liouville 定理, 34
- Mayer-Vietoris 序列, 30
- Minkowski 度量, 81
- Möbius 变换, 34
- Nielsen-Schreier 定理, 18, 24
- Noether 正规化, 21
- Pascal 定理, 72
- Poincaré 上半平面模形, 83
- Poincaré 圆盘模型, 82
- Poincaré 对偶, 69
- Poincaré 引理, 3, 11
- Riemann 球, 34
- Rouché 定理, 11
- Schur 引理, 100
- Serge 嵌入, 59
- van Kampen 定理, 18, 30
- Weierstrass 函数, 54
- 万有系数定理, 69
- 临界值, 23
- 临界点, 23
- 交比, 36, 72
- 交积, 48



仿射变换群, 79

保角, 7

分歧覆叠, 10

切除定理, 78

勾股方程, 21

圈数, 6, 8

射影变换群, 35, 78, 79

带边流形, 77

幅角原理, 9

指数映射, 16

提升, 16

旋子群, 104

旋转指数, 6, 8, 16, 19

映射度, 22, 30

曳物线, 91

椭圆曲线, 56

毛球定理, 19

流形, 76

消没次数, 9

牵引引理, 26

球极投影, 2, 31

球面, 15

留数定理, 8

相交积, 48

紧致辛群, 106

维数, 2

维数不变性, 2

蒂积, 48